

Matériaux Composites

Olivier Montagnier

Version 2.6
Juin, 2024.



Table des matières

1	Généralités sur les matériaux composites	5
1.1	Définition	5
1.2	Historique	5
1.3	Évolution des structures aéronautiques	5
1.4	Les principaux types de matériaux composites	7
1.5	Intérêt des composites	7
1.6	Composites à matrices organiques	8
1.6.1	Démarche et échelles du matériau	8
1.6.2	Les fibres	9
1.6.3	Les matrices	10
1.6.4	L'organisation des fibres longues	10
1.7	Les matériaux composites dans l'aéronautique	14
1.7.1	Part des composites dans les avions de lignes	14
1.7.2	Part des composites dans les avions militaires	18
2	Loi de comportement en élasticité linéaire	21
2.1	Cas général et notations ingénieurs	21
2.2	Matériau élastique monoclinique	22
2.3	Matériau élastique orthotrope	22
2.4	Matériau élastique orthotrope unidirectionnel ou isotrope transverse	22
2.5	Matériaux élastique isotrope	23
3	Loi de comportement du pli	25
3.1	Comportement plan	25
3.2	Propriétés du pli par homogénéisation	26
3.2.1	Propriétés de rigidité	26
3.2.2	Propriétés de résistance	27
3.2.3	Valeurs typiques pour des unidirectionnels fibres/époxy	27
3.2.4	Valeurs typiques pour des bidirectionnels fibres/époxy	28
3.3	Pli composite vs. matériaux conventionnels (avec ou sans « effet de structure »)	28
3.3.1	Comportement en membrane (tension)	28
3.3.2	Comportement en flexion	29
3.3.3	Comparaison des matériaux (diagrammes d'Ashby)	29
3.4	Propriétés du pli hors des axes d'orthotropie	29
4	Théorie des stratifiés	33
4.1	Définitions et notations	33
4.2	Poutres stratifiées	33
4.2.1	Cas de la poutre $[0, 90]_s$ ou $[90, 0]_s$ en tension	34
4.2.2	Cas de la poutre $[0, 90]_s$ ou $[90, 0]_s$ en flexion pure	34
4.2.3	Cas de la poutre $[90, 0]$ en tension : couplages hors-plan	35
4.3	Théorie des stratifiés	36
4.3.1	Cinématique	36
4.3.2	Contraintes	37
4.3.3	Forces et moments	37
4.3.4	Stratifiés équilibrés	38
4.3.5	Stratifiés à symétrie miroir	39
4.3.6	Modules apparents du comportement en membrane	39
4.3.7	Équations d'équilibre des plaques	39
4.4	Comparaison des stratifiés avec les matériaux métalliques	40
4.5	Cas des matériaux « sandwich »	40

5	Endommagement des matériaux composites	43
5.1	Les mécanismes d'endommagement des stratifiés	43
5.2	Comportement des composites et effets non-linéaires	43
5.2.1	Essai de traction dans la direction des fibres	43
5.2.2	Essai de traction dans la direction transverse aux fibres	44
5.2.3	Essai de traction hors axes et effet du cisaillement	44
5.3	Critères de résistance	44
5.3.1	Critère en contraintes maximales	44
5.3.2	Critère en déformations maximales	46
5.3.3	Critère de Tsai-Hill	47
5.3.4	Critère de Tsai-Wu	48
5.3.5	Comparaison des critères	49
5.3.6	Effet des concentrations de contraintes	49
	Bibliographie	51

1 Généralités sur les matériaux composites

1.1 Définition

Le matériau composite est un assemblage d'au moins deux matériaux non miscibles mais ayant une forte capacité d'adhésion :

- la matrice (le liant)
- le (les) renfort(s) (granulats, particules, fibres courtes ou continues).

1.2 Historique

Les matériaux composites sont utilisés par l'homme depuis très longtemps, le bois en est un exemple (matériau composite dit « naturel »). L'historique suivant montre les principales inventions de matériaux composites par l'homme :

- Préhistoire : le torchis constitué de terre et de fibres naturelles ;
- 2600 av JC : les Égyptiens inventent le mortier (mélange de chaux, d'argile, de sable) ;
- Période romaine : les romains inventent le béton qui est un assemblage de mortier et de gravier) ;
- 1756 : John Smeaton redécouvre le béton ;
- 1823 : Charles Macintosh crée l'imperméable avec du caoutchouc sur des tissus comme le coton ;
- 1884 : Witkowski invente le contreplaqué moderne (l'utilisation du bois en lame mince est connu depuis l'Égypte antique) ;
- 1892 : François Hennebique dépose le brevet du béton armé ;
- 1946 : Michelin brevète le pneu à carcasse radiale ;
- 1938 : Russell Games Slayter invente la fibre de verre ;
- 1930's : apparition des premiers matériaux constitués de fibres de verre/résine ;
- 1958 : Roger Bacon invente les premières fibres de carbone ;
- 1960's : apparition des premiers matériaux constitués de fibres de carbone/résine ;
- 1960's : La société DuPont invente les fibres aramides ;
- 1973 : La société DuPont invente les fibres Kevlar®.

1.3 Évolution des structures aéronautiques

Les principales évolutions historiques des structures aéronautiques de 1900 à nos jours sont donnés sur les FIG. 1.1 – 1.2.

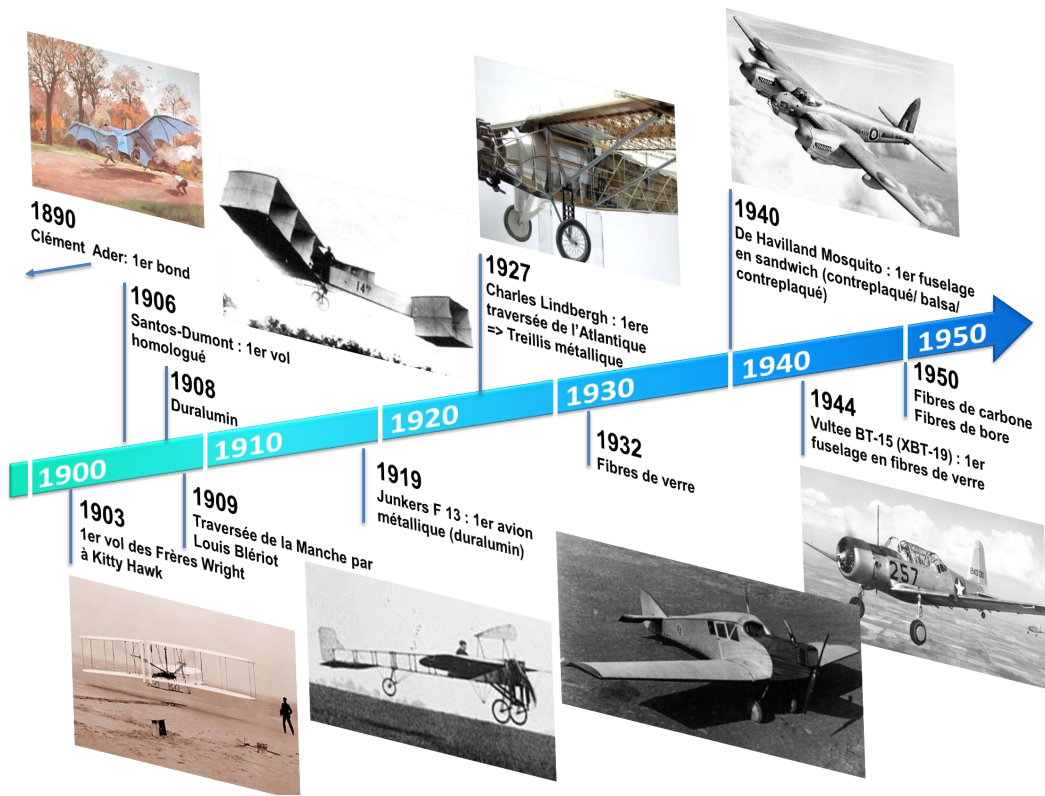


FIGURE 1.1 – Chronologie de l'évolution des structures aéronautiques de 1900 à 1950

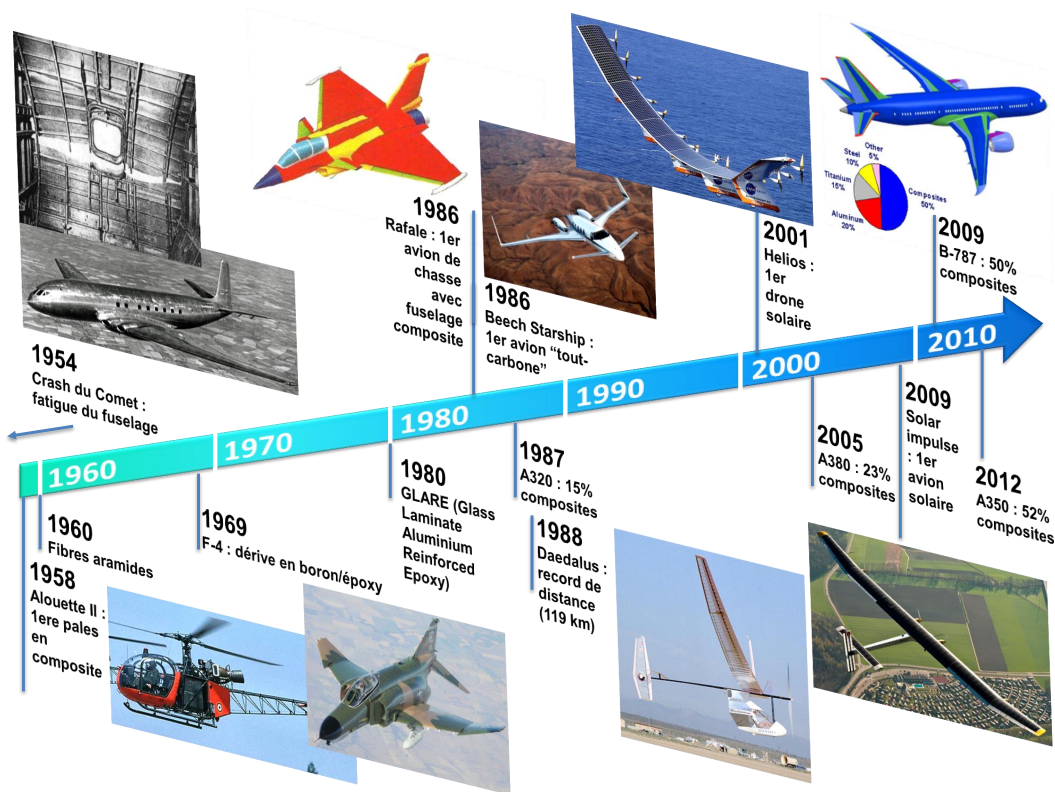


FIGURE 1.2 – Chronologie de l'évolution des structures aéronautiques de 1950 à nos jours

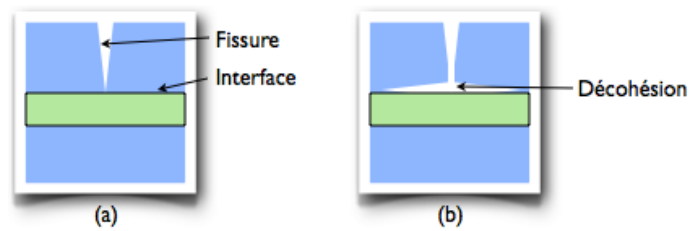


FIGURE 1.4 – Le rôle de l'interface sur la ténacité des composites : lorsqu'une fissure atteint l'interface (a), elle est déviée (b).[Gen11]

1.4 Les principaux types de matériaux composites

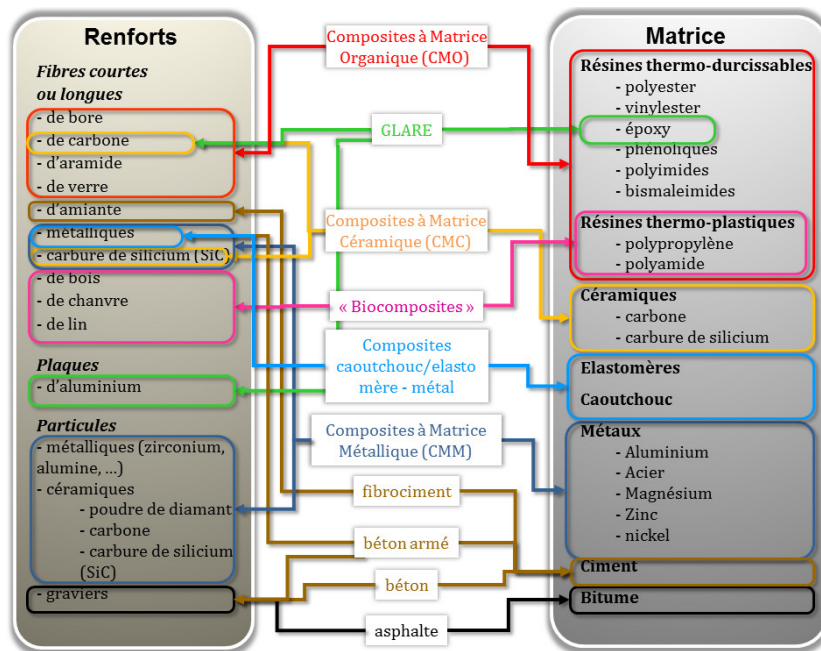


FIGURE 1.3 – Les principaux types de matériaux composites

1.5 Intérêt des composites

On peut se poser la question de l'intérêt des matériaux composites. Le fait d'assembler deux matériaux de nature différente a de nombreux intérêts dont le principal est mécanique.

La matrice a généralement un comportement peu résistant, peu rigide et ductile tandis que les renforts ont un comportement très résistant, très rigide mais fragile. Une structure doit généralement être rigide, résistance voire légère, dans certaines applications. Les matériaux comme le verre (très résistant) semblerait être pertinent pour la conception d'une structure. On sait bien que ce n'est pas le cas à cause de sa fragilité. Le verre est très sensible aux défauts et les fissures s'y propagent aisément. Dans le cas d'un composite fibre de verre/époxy, il en va tout autrement. La résine époxy permet la répartition des efforts au sein du matériau. Avec la résine, la rupture d'une fibre n'entraîne pas forcément la rupture de la fibre voisine. De même une fissure dans la résine s'arrête aux abords de la fibre ou change de direction et suit l'interface (FIG. 1.4). « En d'autres termes, au lieu d'une rupture brutale, on observe plutôt une décohésion, c'est-à-dire un décollement progressif entre les renforts et la matrice. L'interface joue donc le rôle de fusible et rend les composites plus ductiles et plus tenaces, c'est-à-dire plus résistants à la rupture, que leurs constituants élémentaires. Ce phénomène, allié au faible taux de défauts des fibres (alors qu'une pièce massive du même matériau en contiendrait beaucoup plus), permet d'expliquer un paradoxe : les composites à base de fibres de verre longues, par exemple, sont bien plus résistants que le verre massif, alors que leurs propriétés mécaniques proviennent essentiellement des fibres de verre ! Ceci illustre un aspect fondamental des composites : grâce à leur structure et leur géométrie, ils possèdent des propriétés que leurs constituants seuls n'ont pas [...]. Ainsi, certains composites à fibres et à matrices céramiques ont un comportement ductile, alors qu'il est bien connu que les céramiques ont des comportements fragiles... » [Gen11].

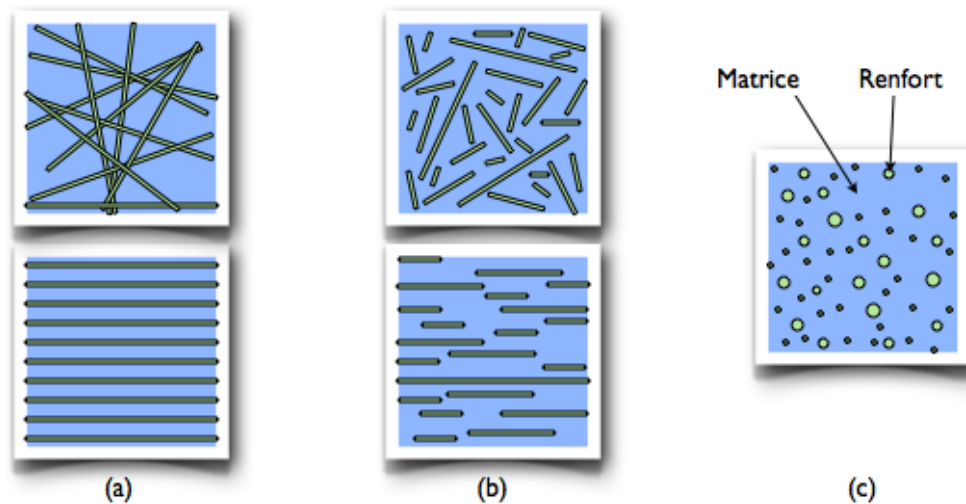


FIGURE 1.5 – Les différentes organisations des composites à matrice organiques [Gen11]

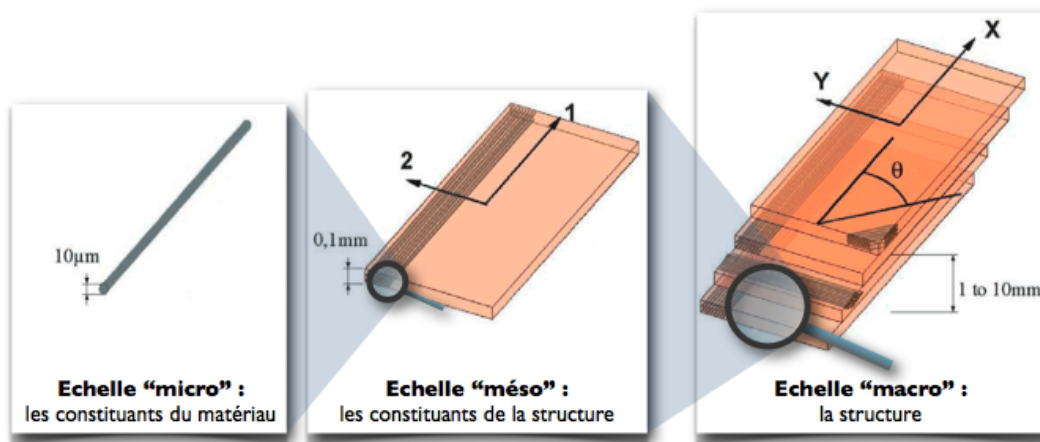


FIGURE 1.6 – Les différentes échelles des composites à matrice organiques (Image de Gilles Lubineau)

1.6 Composites à matrices organiques

Les composites à matrices organiques possèdent d'une matrice en résine (thermoplastique ou thermodurcissable). La géométrie des renforts et leur type sont très variables. Il existe trois types de renforts (FIG. 1.5) :

- les fibres longues (longueur de l'ordre de la taille de la pièce) orientées de manière aléatoire ou non ;
- les fibres courtes (longueur faible devant la taille de la pièce) orientées de manière aléatoire ou non ;
- les particules.

Les fibres longues ont de meilleures propriétés mécaniques que les fibres courtes, mais elles induisent un comportement fortement anisotrope et sont plus difficiles à mettre en œuvre.

1.6.1 Démarche et échelles du matériau

Dans la suite du cours, on distinguera trois échelles pour traiter de la modélisation des CMO (FIG. 1.6) :

- l'échelle "micro" qui correspond à l'échelle des fibres ; sa taille est de l'ordre du diamètre d'une fibre (quelques microns) ;
- l'échelle "mésos" qui correspond à l'échelle des plis ou quelquefois des mèches (ou fil) ; le pli est alors considéré comme un milieu homogène orthotrope ; sa taille est de l'ordre de l'épaisseur d'un pli (quelques dixièmes de millimètre) ;
- l'échelle "macro" qui correspond à l'échelle de la pièce ; le composite est alors considéré comme un milieu homogène orthotrope ; sa taille est de l'ordre du centimètre à beaucoup plus.

La *démarche classique* de modélisation des *matériaux composites stratifiés* est la suivante (FIG. 1.7). On s'intéresse tout d'abord aux constituants : *les fibres et la matrice* (CHAP. 1). On mixe ensuite les deux matériaux pour obtenir le

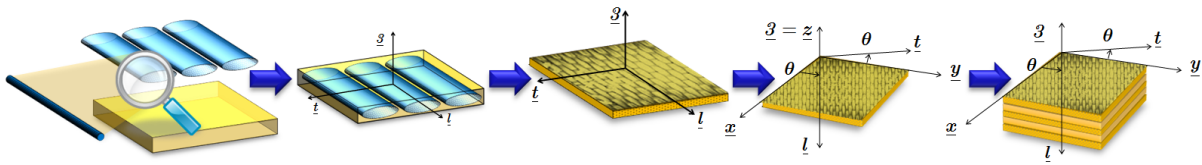


FIGURE 1.7 – La démarche de modélisation des matériaux composites stratifiés

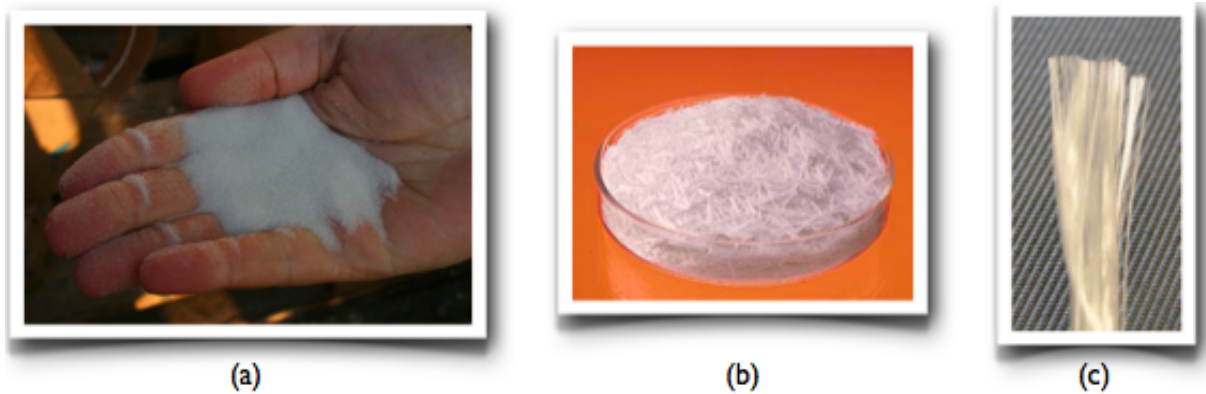


FIGURE 1.8 – Le verre sous ses différentes formes : (a) micro-billes creuses ; (b) fibres courtes ; (c) fibres longues [Gen11]

comportement plan du pli dit *orthotrope*, cette étape est appelée *homogénéisation micromécanique* (CHAP. 2 – 3). Le comportement du pli est ensuite déterminé dans des axes quelconques (CHAP. 3). Le comportement du stratifié est enfin obtenu en sommant le comportement des différents plis. Cette dernière étape est appelée *homogénéisation macromécanique*, plus connu sous le nom de *théorie des stratifiés* (CHAP. 4).

On s'intéresse tout d'abord à l'échelle micro c'est-à-dire celle des constituants : les fibres et la matrice.

1.6.2 Les fibres

1.6.2.1 Les fibres de verre

Les fibres de verre sont fabriquées par étirement à grande vitesse de verre en fusion à travers une filière. Ce procédé de fabrication est simple et peu coûteux ce qui a permis leur très large diffusion. Le diamètre de la fibre est compris entre 2.5 et 20 microns. De par sa fabrication, la structure microscopique de la fibre est homogène. Son comportement est homogène, isotrope, élastique linéaire et fragile. Il existe plusieurs types de fibres : le verre E, le verre R ou S ayant de meilleures propriétés mécaniques, le verre D ayant une faible constante diélectrique. Le verre se trouve sous forme de fibres courtes ou longues mais aussi sous forme de micro-billes 1.8.

1.6.2.2 Les fibres Aramides

Les fibres aramides (poly-para-phénylène ou Kevlar®) sont des fibres textile (polymère). Leur procédé de fabrication est complexe (polymérisation du 1,4-diamino benzène et du chlorure d'acide Téréphtalique) et coûteux (acide sulfurique concentré nécessaire durant la synthèse). Le diamètre de la fibre est de 10 microns. Les fibres aramides se trouvent sous forme de fibres courtes ou longues 1.9. Elles peuvent être utilisées comme un substitut de l'amiante.

1.6.2.3 Les fibres de carbone

Thomas Edison dépose en 1879 un brevet concernant des fibres de carbone utilisées comme filament pour une lampe électrique mais les premières fibres de carbone utilisées en mécanique sont inventées à la fin des années 60. Le procédé de fabrication est complexe (oxydation du polyacrylonitrile puis carbonisation) et coûteux. Le diamètre de la fibre est compris entre 5 et 7 microns. La structure de la fibre est feuilletée (FIG. 1.10). Ces « feuilles » correspondent aux plans graphitiques disposés suivant les génératrices de la fibre. Le comportement de la fibre est ainsi fortement anisotrope. Il est élastique linéaire fragile en traction longitudinale. Il existe une grande variété de fibres classées en deux catégories : les fibres haut module (HM pour « high modulus ») et les fibres haute résistance (HS pour « high strength »). Les fibres de carbone se trouvent sous forme de fibres longues.

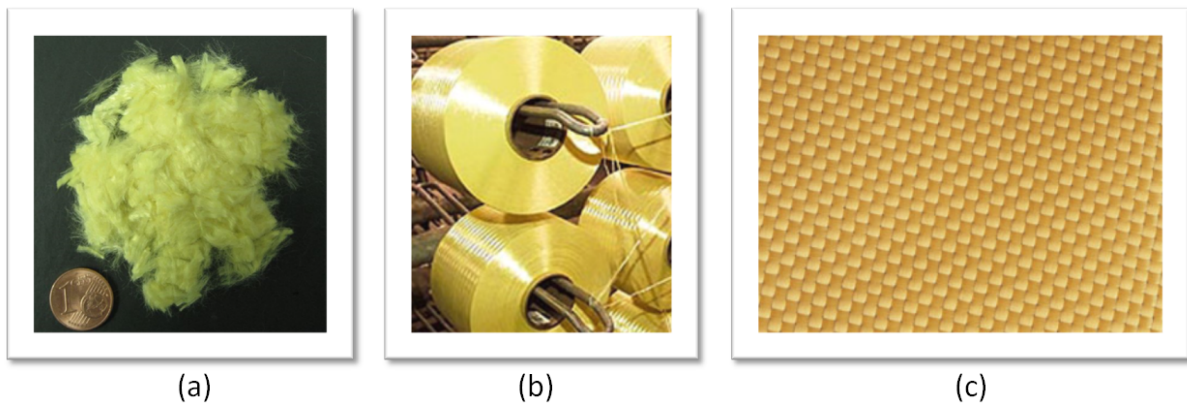


FIGURE 1.9 – Le kevlar sous ses différentes formes : (a) fibres courtes ; (b) bobines de fibres longues ; (c) fibres longues tissées

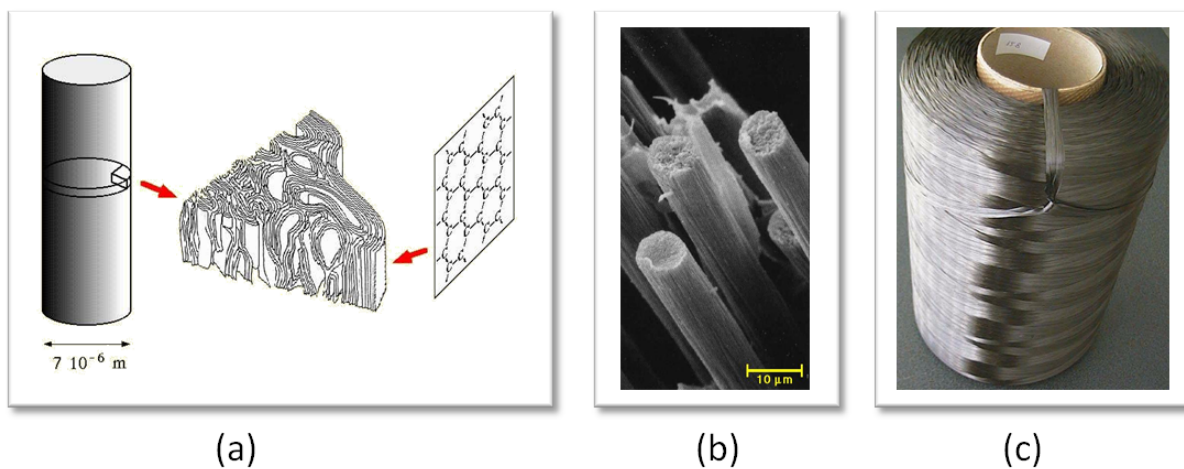


FIGURE 1.10 – La fibre de carbone : (a) détails de la microstructure ; (b) micrographie ; (c) bobines de fibres longues (48000 filaments)

1.6.2.4 Propriétés

1.6.3 Les matrices

Il existe deux types de matrice : les thermodurcissables (TD) et les thermoplastiques (TP).

Les thermodurcissables, comme leur nom l'indique, vont être durci à chaud. A la température ambiante, elles peuvent être soit dans un état liquide (fabrication par voie humide) soit dans un état « pâteux » (pré-imprégnés). Les thermoplastiques sont déjà polymérisées et solides à température ambiante. En les chauffant, il redeviennent liquide et peuvent infuser les fibres. En refroidissant ils reviennent à l'état initial.

Les TAB. 1.2 – 1.3 permettent de comparer les propriétés des deux types de matrice.

1.6.4 L'organisation des fibres longues

1.6.4.1 Unidirectionnels

Pour utiliser au mieux les propriétés des fibres dans le sens longitudinal, on utilise des nappes d'unidirectionnels (UD). Ces nappes sont pré-imprégnées de résine pour être facilement utilisé (Fig. 1.11). Le principal intérêt est la possibilité de placer les fibres dans les directions souhaitées en fonction des sollicitations.

L'organisation la plus simple consiste à disposer les fibres en nappe suivant une seule direction. Pour maintenir la cohésion de la nappe on réalise un pré-imprégné. Ces nappes sont surtout utilisées avec le procédé de "drapage de pré-imprégné" ; elles sont cependant difficiles à mettre en œuvre pour des surfaces à double courbure.

			Verre	Kevlar	Carbone		
			E	49	HS T300	HM T800	HM M50
Comportement	-	-	isotrope		anisotrope		
Masse volumique	ρ_f	kg/m ³	2 540	1 440	1 750	1 800	1 910
Module							
Sens longitudinal	E_{lf}	GPa	74	130	230	290	390
Sens transverse	E_{tf}	GPa	74	5.4	15	?	6
De cisaillement	G_{ltf}	GPa	30	12	50	?	20
Coefficient de Poisson	ν_{tf}	-	0.25	0.4	0.3	?	0.35
Contrainte de rupture							
En traction longit.	σ_{lf}^+	MPa	3 450	4 100	3 500	5 600	2 400
En compression longit.	σ_{lf}^-	MPa	1 200	600	3 500	5 600	1 200
Coefficient de dilat. axiale	α_{lf}	°C ⁻¹	0.5×10^{-5}	-0.2×10^{-5}	0		
Coût approximatif	-	euros/kg	3	25	150-450		

TABLE 1.1 – Propriétés de différentes fibres

Résines		Thermoplastiques	Thermodurcissables
Mise en œuvre	État de base	Solide (prêt à l'emploi, polymérisé)	Liquide visqueux (à polymériser)
	Stockage	Illimité	Temps réduit (précautions à prendre)
	Mouillabilité des renforts	Difficile	aisée
	Moulage	Chauffage (fusion/ramollissement + refroidissement de fixation)	chauffage continu
	Cycle	court	plus long (polymérisation)
Propriétés	Tenue au choc	assez bonne	limitée
	Tenue thermique	réduite sauf TP thermostables	meilleure
	Chutes et déchets	recyclables	perdus
	Conditions de mise en œuvre	bonnes + propreté	émanations pour méthode humide (allergie possible)

TABLE 1.2 – Comparaison des résines thermoplastiques et des résines thermodurcissables

			Epoxyde*	Polyester**
Comportement	-	-	isotrope	
Masse volumique	ρ_m	kg/m ³	1 200	1 100
Module				
Sens longitudinal	E_m	GPa	3.6	2.5
De cisaillement	G_m	GPa	1.4	1.0
Coefficient de Poisson	ν_m	-	0.3	0.3
Contrainte de rupture				
En traction longit.	σ_m^+	MPa	80	40
En compression longit.	σ_m^-	MPa	180	100
Coefficient de dilat. axiale	α_m	°C ⁻¹	5×10^{-5}	5×10^{-5}
Retrait lors de la réticulation		%	0.2	6
Température de transition vitreuse		°C	140	50

TABLE 1.3 – Propriétés des différentes résines (*caractéristiques d'une résine époxyde non chargée durcie à 180°C; **caractéristiques d'une résine polyester insaturée non chargée, durcissement à température ambiante)

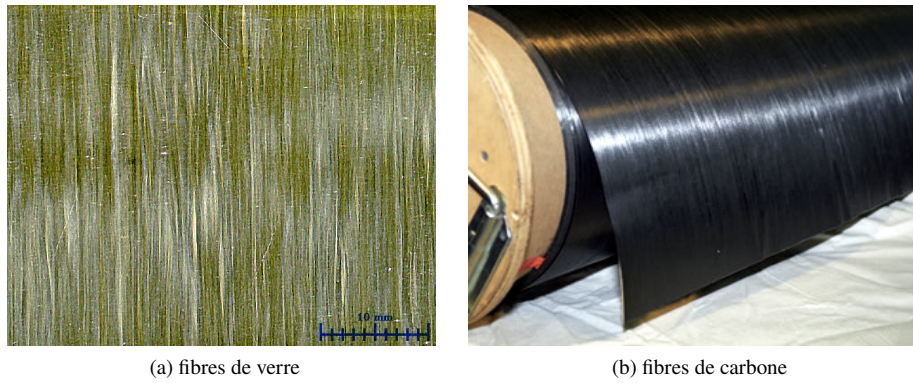


FIGURE 1.11 – Nappes d'unidirectionnel pré-imprégnées

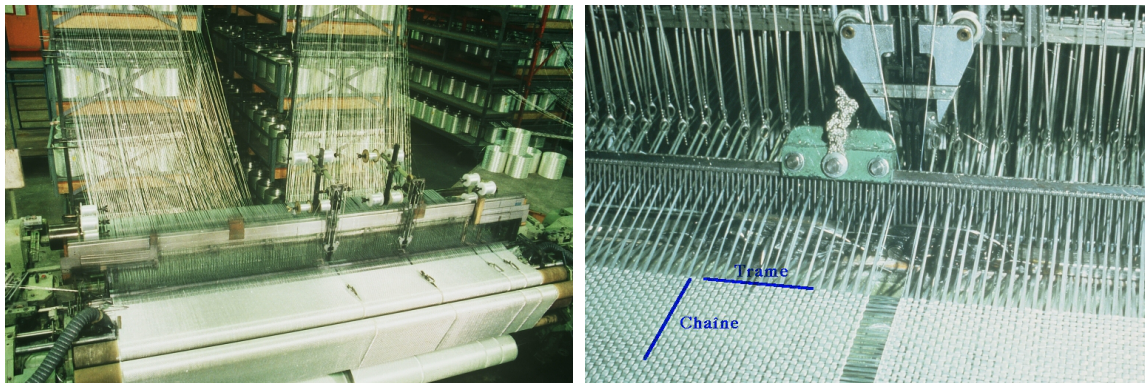


FIGURE 1.12 – Métiers à tisser utilisés pour la fabrication des matériaux composites tissés (images de Saint Gobain Vetrotex)

1.6.4.2 Bidirectionnels

Les tissus bidirectionnels (BD) sont fabriqués par des métiers à tisser équivalents à ceux utilisés dans l'industrie du textile (FIG. 1.12). Les *fils* (ou *mèches* ou encore *torons*) de chaîne contenant chacun des centaines voire des milliers de fibres sont déroulés dans le sens de la longueur. Les fils de trame sont alors tressés perpendiculairement. Différents modes de croisement sont utilisés :

- Taffetas : une mèche de trame passe successivement dessus et dessous une mèche de chaîne ;
- Sergé : une mèche de trame passe successivement dessus n mèches de chaîne puis dessous n mèches de chaîne ;
- Satin : une mèche de trame passe successivement dessus n fils de chaîne puis dessous une mèche de chaîne (voir les figures ci-dessous).

En fonction de l'utilisation, le tissu peut contenir la même quantité de fil de chaîne et de trame (tissu équilibré) ou une direction prépondérante (tissu déséquilibré).

Les principaux avantages des tissus bidirectionnels sont :

- de permettre un placement aisée sur tous types de forme (plus particulièrement pour les sergés et les satins) ;
- de permettre de choisir la proportion de fil de chaîne et de trame ;
- de pouvoir utiliser plusieurs types de fibres (tissu hybride) ;
- de limiter la propagation des fissures transverses dans le pli ;
- une meilleure tenue au délaminage que les plis unidirectionnels.

Les principaux inconvénients sont :

- d'être moins rigide en traction et compression dans la direction des fibres qu'un pli unidirectionnel ;
- d'être moins résistant en traction et compression dans la direction des fibres qu'un pli unidirectionnel ;

L'ondulation des fils donc des fibres explique ces différences, elle favorise notamment le micro-flambage des fibres en compression. L'ondulation des fibres diminue des taffetas aux sergés et aux satins. En conséquence les caractéristiques planes augmentent des taffetas aux sergés et aux satins. Cet effet dépend beaucoup du diamètre des mèches de fibres.

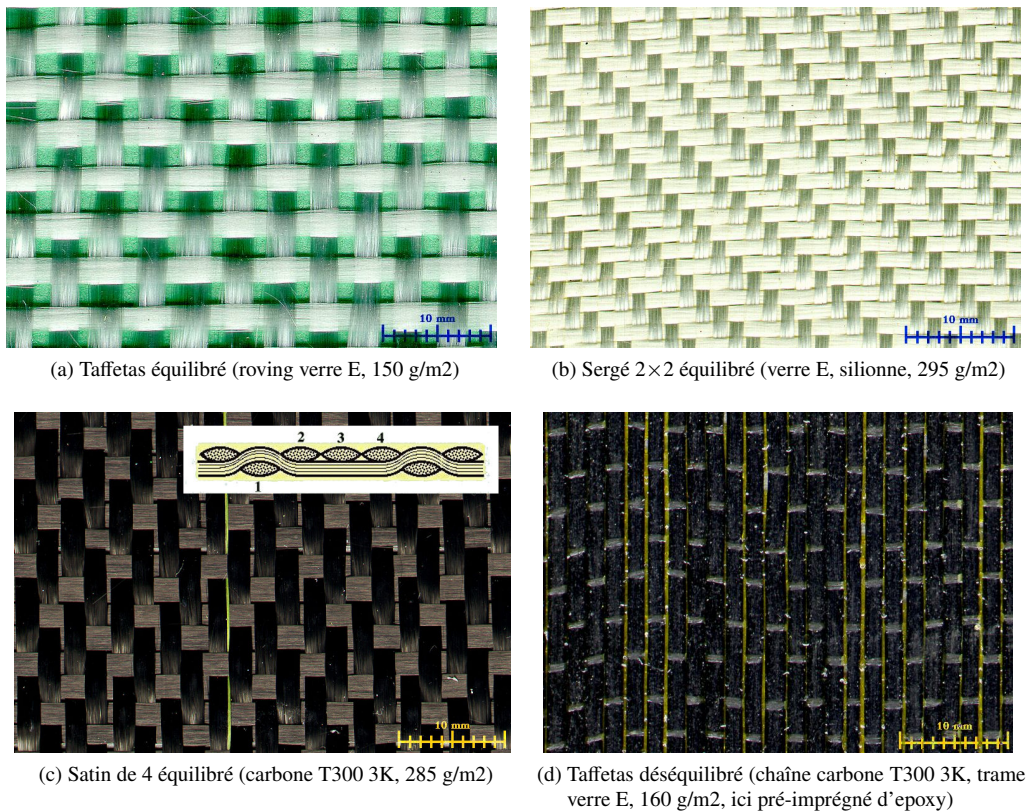


FIGURE 1.13 – Exemples de composites tissés (images de [Cha01] et Saint Gobain Vetrotex)

1.6.4.3 Multidirectionnels plans

Les mats sont constitués de fibres coupées ou continues disposées aléatoirement suivant toutes les directions du plan. Les fibres sont maintenues par un liant soluble dans les résines polyester insaturées et ne sont pas compatibles avec les résines époxydes [Cha01].

1.6.4.4 Tridimensionnels ou 3D

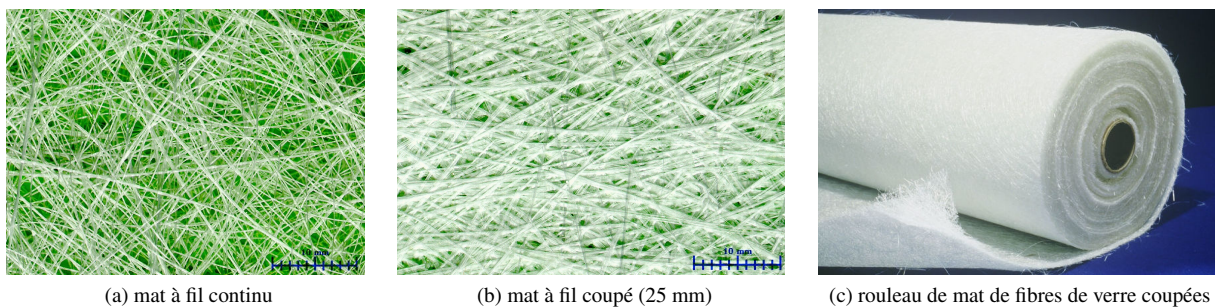


FIGURE 1.14 – Exemples de multidirectionnels en fibres de verre (images de Saint Gobain Vetrotex)

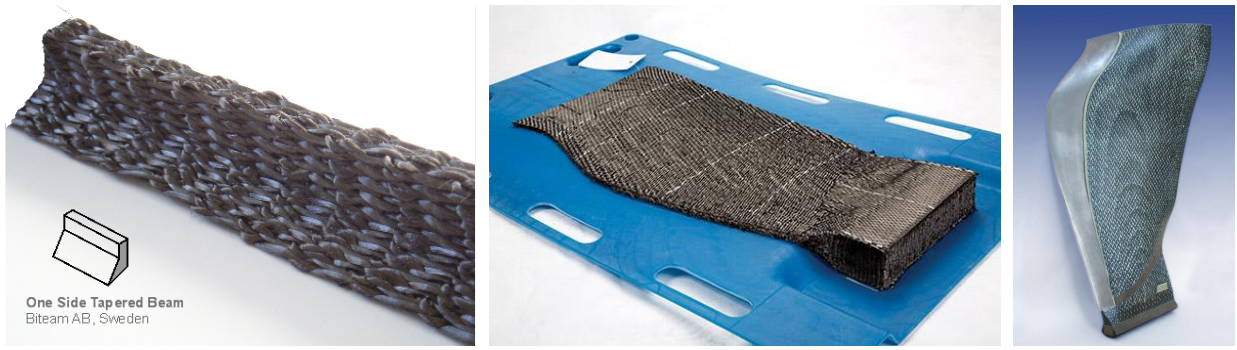


FIGURE 1.15

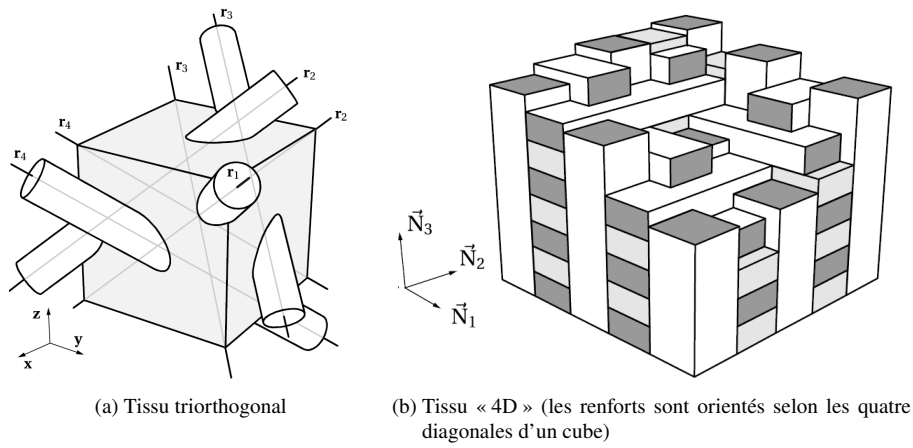
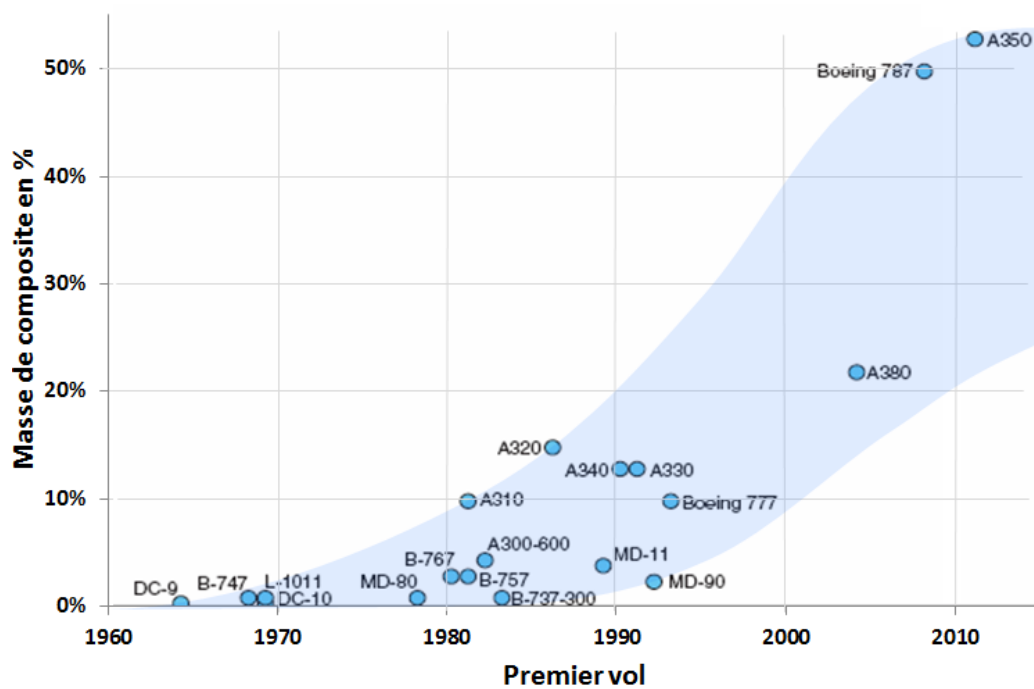


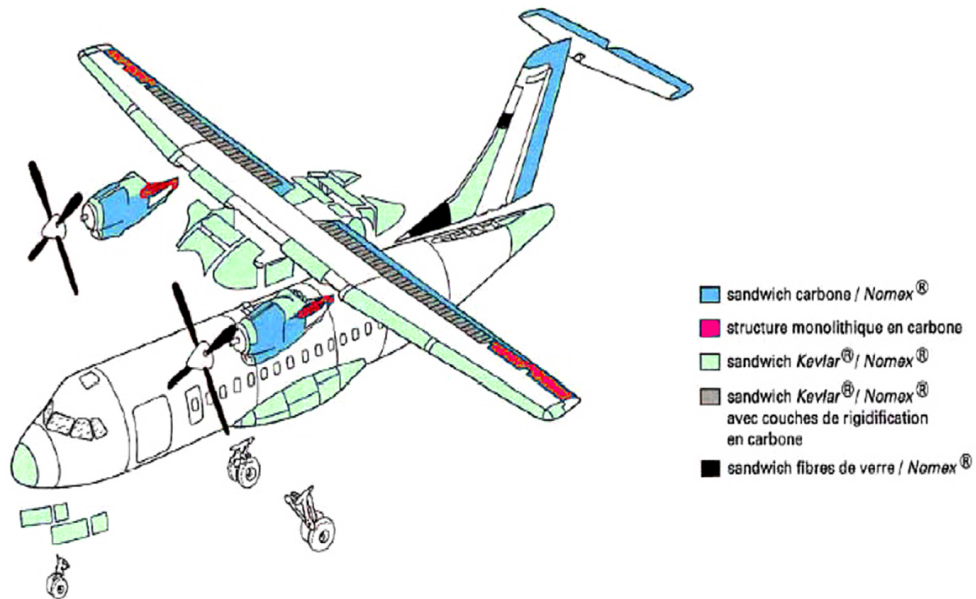
FIGURE 1.16 – Exemples de tissus tridimensionnels (images de Laurent Gornet [Gor08])

1.7 Les matériaux composites dans l'aéronautique

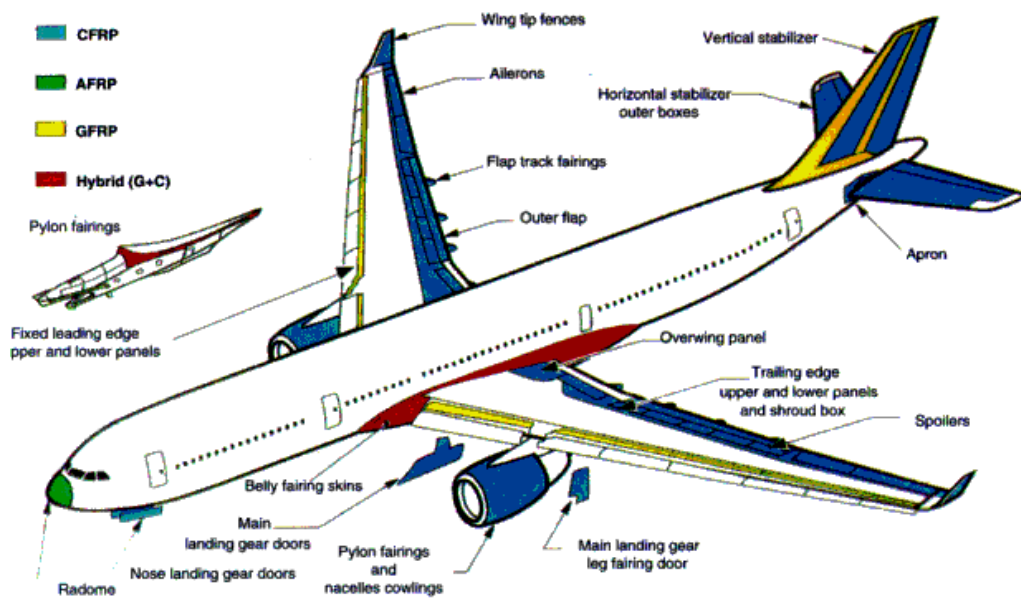
1.7.1 Part des composites dans les avions de lignes



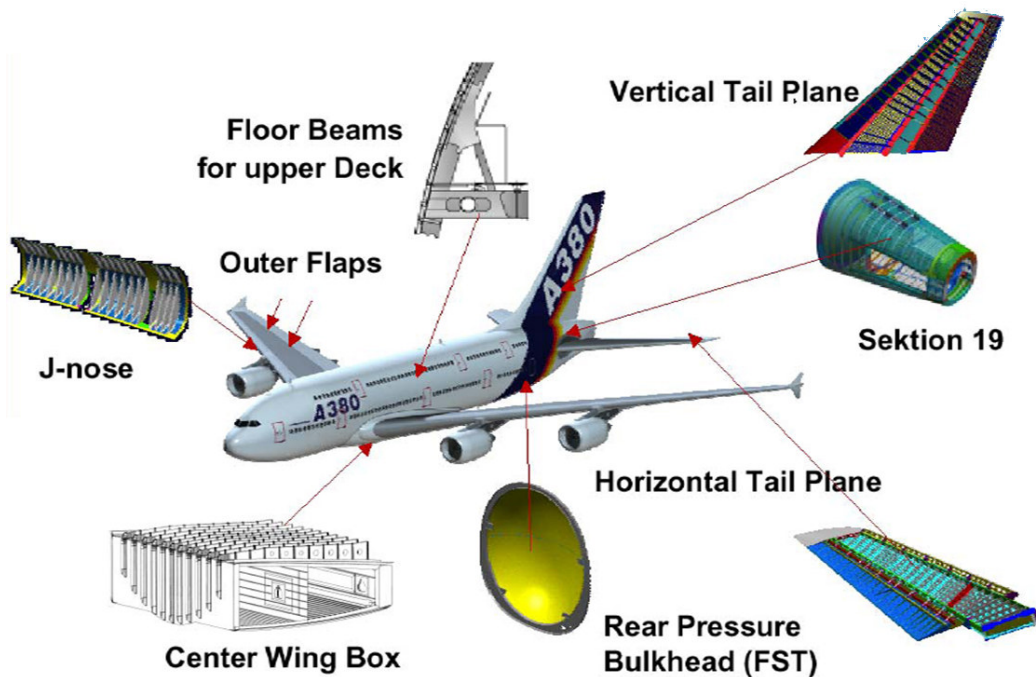
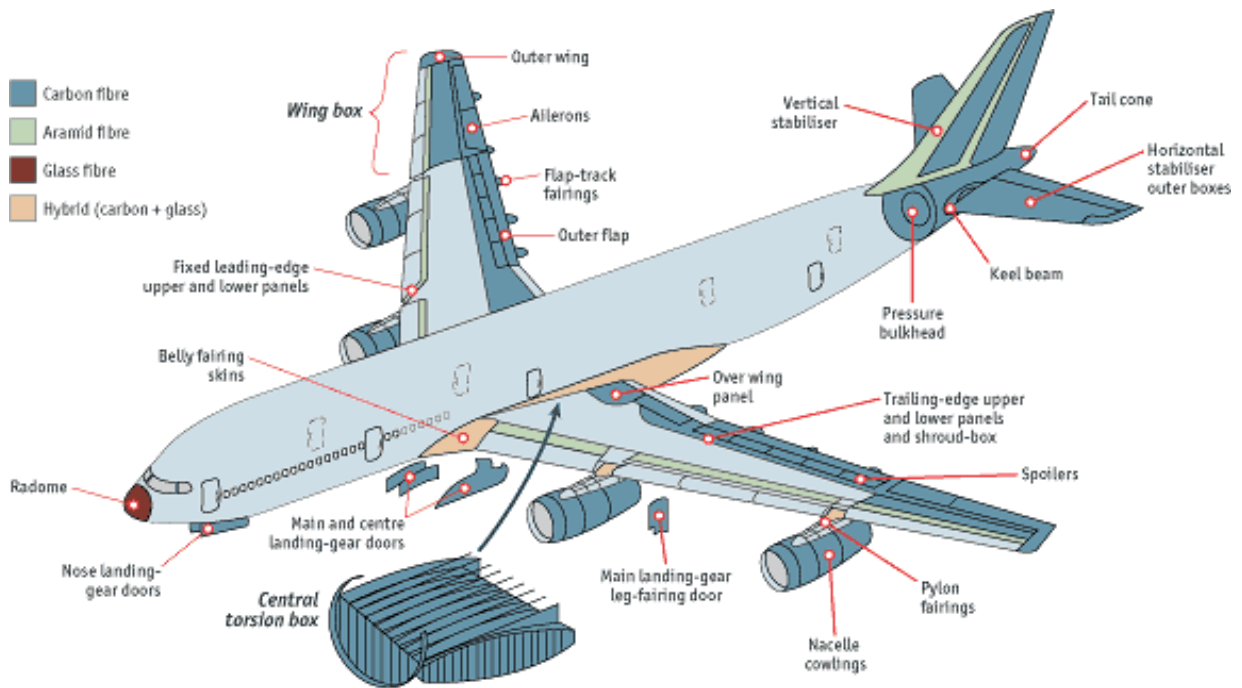
1.7.1.1 ATR 42



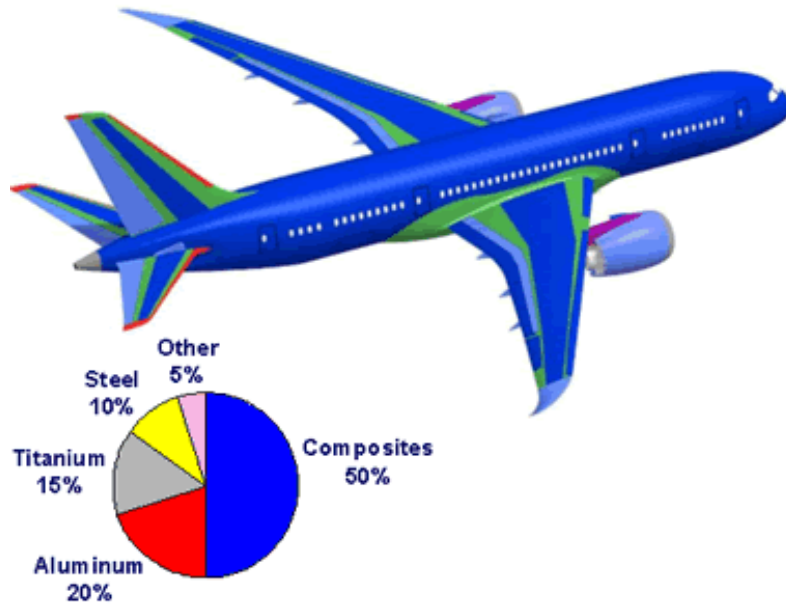
1.7.1.2 Airbus A330



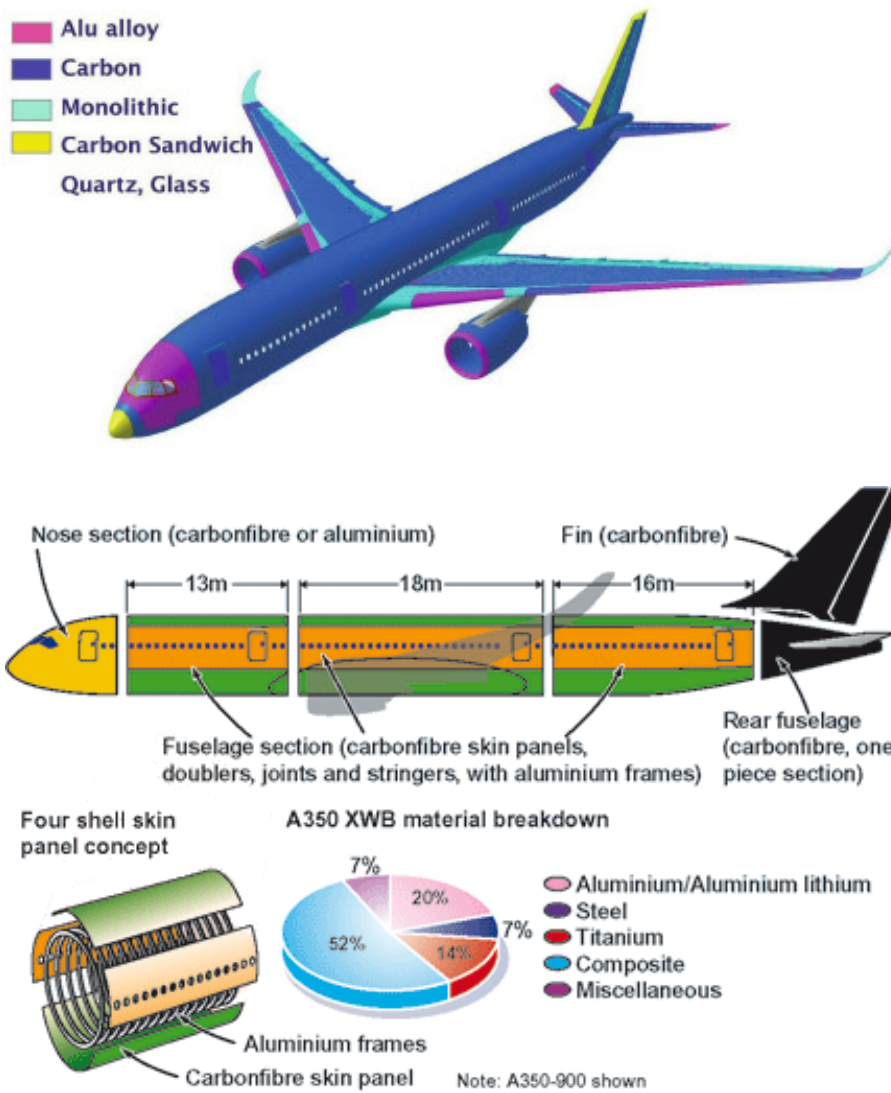
1.7.1.3 Airbus A380



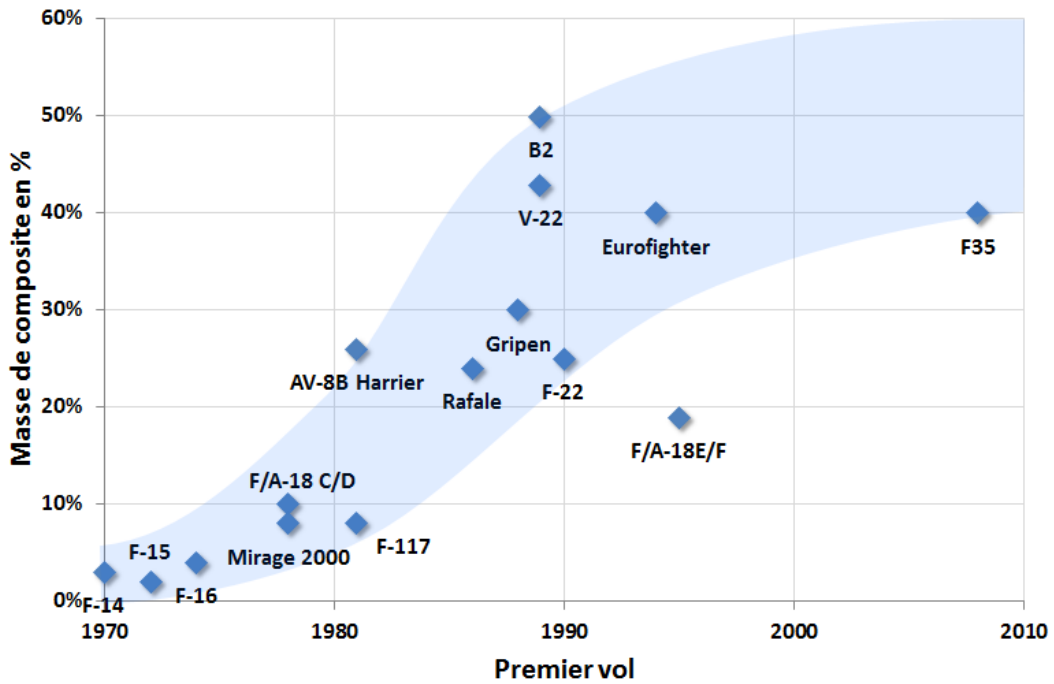
1.7.1.4 Boeing 787



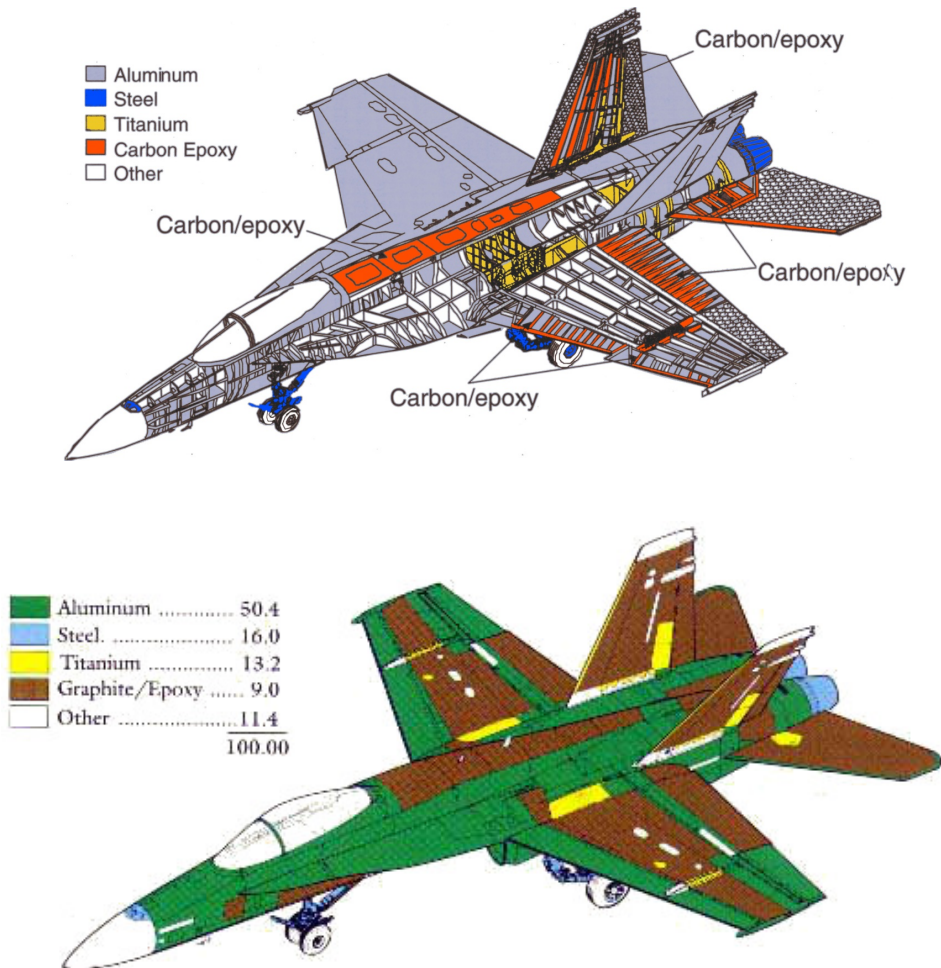
1.7.1.5 Airbus A350



1.7.2 Part des composites dans les avions militaires

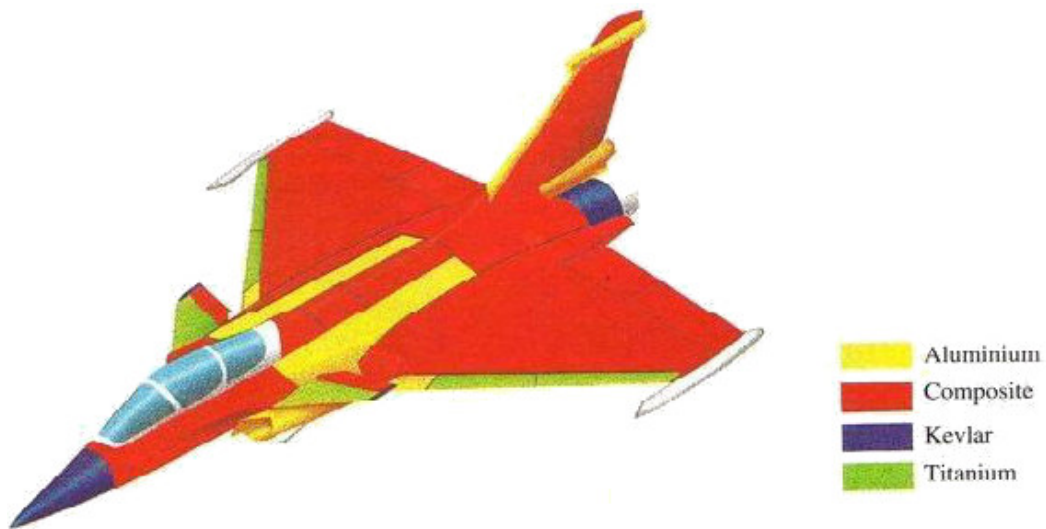


1.7.2.1 Le F18

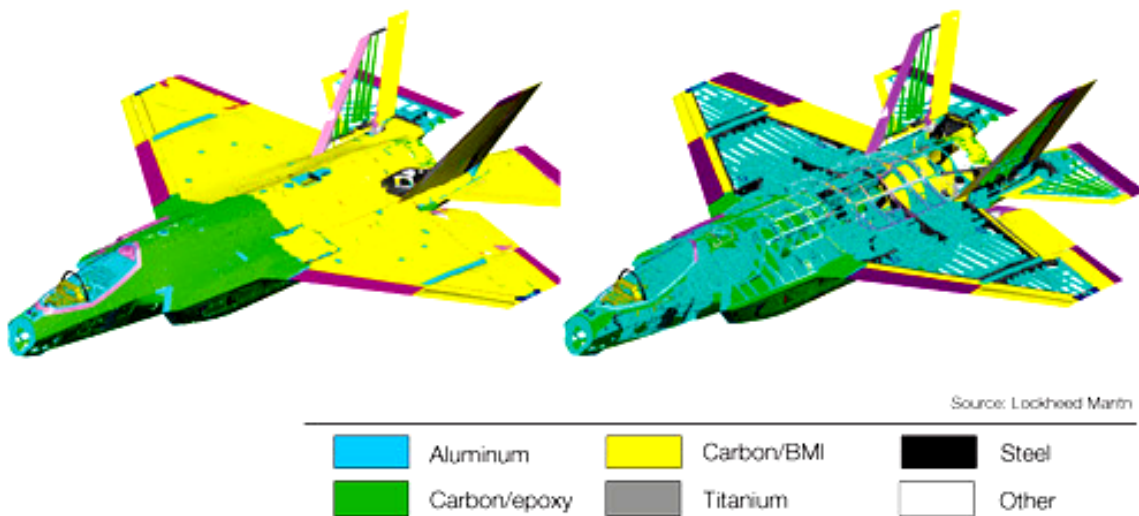


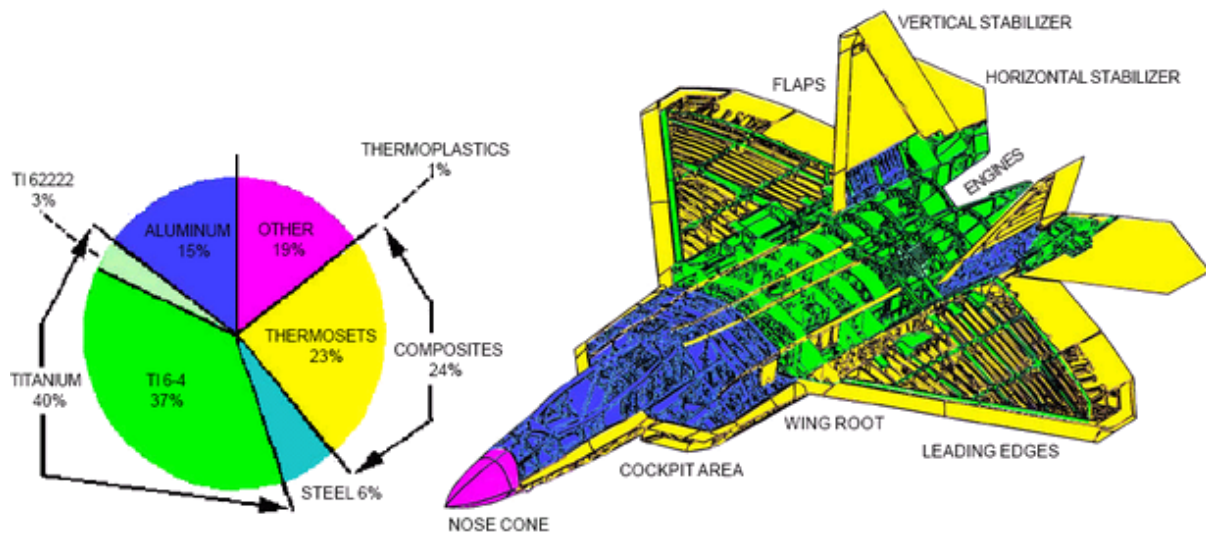
1.7.2.2 Le Rafale

Le Rafale se caractérise par l'introduction massive de matériaux de nouvelles technologies : les matériaux composites dont la proportion représente environ 24 % de la masse de la cellule et 70 % de la surface mouillée, les technologies de furtivité, les structures titane SPFDB (formage super-plastique et soudure par diffusion) et les structures aluminium SPF (formage superplastique).



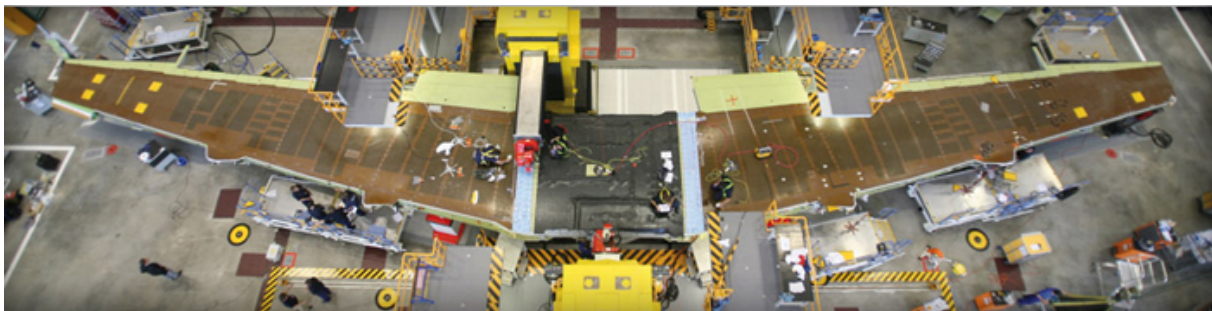
1.7.2.3 Le F22





1.7.2.4 L'Airbus A400M

De manière à réduire le poids, 30% de la structure de l'A400M est réalisée en composite. Ces parties incluent la majeure partie des ailes, avec pour la première fois, les longerons principaux. De plus, pratiquement la totalité de la queue (les stabilisateurs horizontaux et verticaux et les surfaces de contrôle), la porte arrière, les baies de trains d'atterrissage et les hélices (avec une coque en Kevlar) sont fait en composite. Les panneaux des ailes de 19m sont les plus grand jamais produits (source Airbus).



2 Loi de comportement en élasticité linéaire

Ce chapitre s'intéresse aux loi de comportement des matériaux élastiques anisotropes. Le comportement général est défini avec les notations ingénieurs. En fonction des symétries présentes dans le matériau, les lois sont simplifiées. On traite le cas des matériaux monocliniques, orthotrope, orthotrope unidirectionnel et isotrope.

2.1 Cas général et notations ingénieurs

Pour un solide, la loi de comportement en **élasticité linéaire** et sous les hypothèses de **petites perturbations** s'écrit en fonction des tenseurs infinitésimaux sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\underline{S}}} : \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\underline{C}}} = \underline{\underline{\underline{S}}}^{-1} \quad (2.1)$$

où $\underline{\underline{\underline{C}}}$ (aussi noté $\underline{\underline{\underline{K}}}$ dans la littérature) est appelé *tenseur de rigidité* (stiffness matrix) et $\underline{\underline{\underline{S}}}$ est appelé *tenseur de souplesse* (compliance matrix). Ils sont du 4ème ordre et possèdent $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ coefficients !

Les propriétés de symétrie des tenseurs des contraintes et des déformations ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ et $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$) permettent de montrer que :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \\ \sigma_{ji} = C_{jilk}\varepsilon_{lk} \end{cases} \Rightarrow C_{ijkl} = C_{jilk} \quad \text{de même} \quad C_{ijkl} = C_{jikl}$$

Finalement, les tenseurs $\underline{\underline{\underline{C}}}$ ou $\underline{\underline{\underline{S}}}$ ne possèdent que $6 \times 6 = 36$ coefficients indépendants ! Bien qu'il reste encore 36 coefficients à déterminer, cette remarque a tout de même le mérite de permettre une représentation des tenseurs en deux dimensions et non en quatre dimensions (pas très pratique à visualiser !). En notant,

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} ; \quad \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

il vient

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\underline{S}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\underline{C}}} = \underline{\underline{\underline{S}}}^{-1} \quad (2.3)$$

où

$$\underline{\underline{\underline{C}}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\underline{S}}} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Cette notation est dite *notation de l'ingénieur* ou *notation de Voigt*. On peut montrer que ces nouveaux tenseurs d'ordre 2 $\underline{\underline{\underline{C}}}$ et $\underline{\underline{\underline{S}}}$ sont symétriques. Ils ne reste donc plus que $6 \times 6 - 15 = 21$ coefficients à déterminer ! Heureusement, il existe des symétries matérielles dans la grande majorité des matériaux utilisés par l'ingénieur.

¹. A ne pas confondre avec le tenseur de Piola-Kirchhoff.

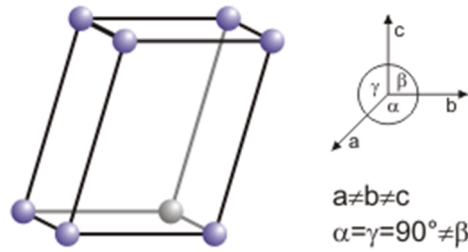


FIGURE 2.1 – Exemple de matériau monoclinique

2.2 Matériau élastique monoclinique

Un matériau est dit *monoclinique* s'il ne possède qu'un seul plan de symétrie. On suppose que le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ est plan de symétrie. Dans ce cas, dans le repère $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, la tenseur de rigidité peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Il n'y a donc plus que 13 coefficients à déterminer ! Un exemple de matériau monoclinique est le soufre monoclinique. Sa structure cristallographique est représentée sur la (Fig. 2.1).

2.3 Matériau élastique orthotrope

Un matériau est dit *orthotrope* s'il possède trois plans de symétrie orthogonaux deux à deux. On suppose que le repère $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ est le repère d'orthotropie. Dans ce repère, le tenseur de rigidité s'écrit sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Il n'y a donc plus que 9 coefficients à déterminer ! Ces coefficients 9 notés E_i , G_{ij} et ν_{ij} sont respectivement des modules de rigidité, des modules de cisaillement et des coefficients de Poisson. Le tenseur de souplesse peut s'écrire simplement à partir de ces coefficients :

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (2.7)$$

Des exemples de matériaux orthotropes sont les *matériaux composites tissés noyés dans de la résine* généralement appelés *pli tissé* (Fig. 2.2-2.3). Si le plis tissé est dit *équilibré*, c'est-à-dire que la quantité de fibre est la même dans le *sens chaîne* que dans le *sens trame* comme sur la Fig. 2.3, le comportement sera encore simplifié puisque $E_1 = E_2$, $\nu_{12} = \nu_{21}$ et $\nu_{13} = \nu_{23}$.

2.4 Matériau élastique orthotrope unidirectionnel ou isotrope transverse

Un matériau élastique est dit *orthotrope unidirectionnel* ou *isotrope transverse* ou encore *orthotrope de révolution* s'il possède un axe de symétrie. On suppose que l'axe \underline{e}_1 est l'axe de symétrie. Dans un repère contenant l'axe \underline{e}_1 , le tenseur de rigidité s'écrit sous la forme suivante :

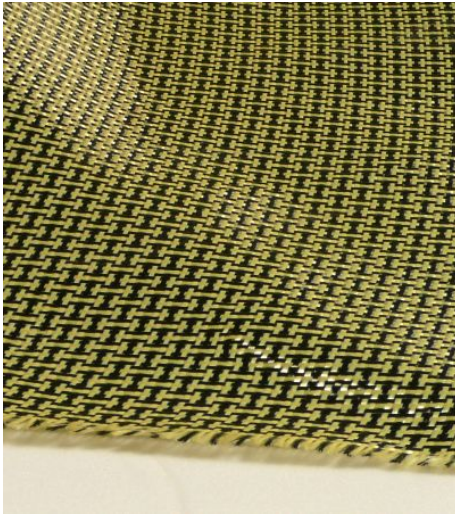


FIGURE 2.2 – Tissu en fibres de Carbone et Aramide plus connu sous le nom de Kevlar (sans résine)

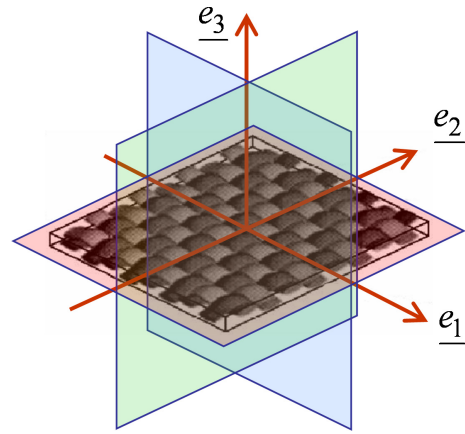


FIGURE 2.3 – Un pli tissé équilibré en fibres de carbone noyé dans une résine présentant trois plans de symétrie orthogonaux deux à deux \Rightarrow comportement « élastique linéaire » (en première approximation) et orthotrope

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Il n'y a donc plus que 5 coefficients à déterminer ! Le tenseur de souplesse peut s'écrire simplement à partir de ces coefficients :

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{23})}{E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} E_2 = E_3 \\ \nu_{12} = \nu_{13} \\ G_{12} = G_{13} \end{cases} \quad (2.9)$$

Un exemple de matériau unidirectionnel est un ensemble de *fibres unidirectionnelles noyées dans un substrat* appelé *pli unidirectionnel* (UD) (FIG. 2.4-2.5).

2.5 Matériaux élastique isotrope

Un matériau élastique est dit *isotrope* si il possède les mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions. En général, les *matériaux métalliques sont isotropes*. Dans tout repère, le tenseur de rigidité s'écrit sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \bar{E} & \nu\bar{E} & \nu\bar{E} & 0 & 0 & 0 \\ \nu\bar{E} & \bar{E} & \nu\bar{E} & 0 & 0 & 0 \\ \nu\bar{E} & \nu\bar{E} & \bar{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} ; \bar{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (2.10)$$

Il n'y a que deux coefficients à déterminer. Le tenseur de souplesse s'écrit alors :

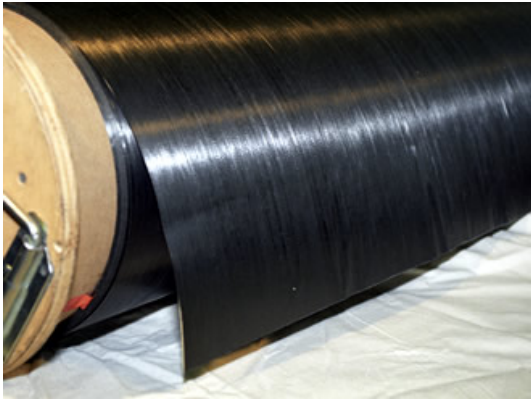


FIGURE 2.4 – Pli unidirectionnel en fibres de carbone sous forme de rouleau imprégné de résine époxy

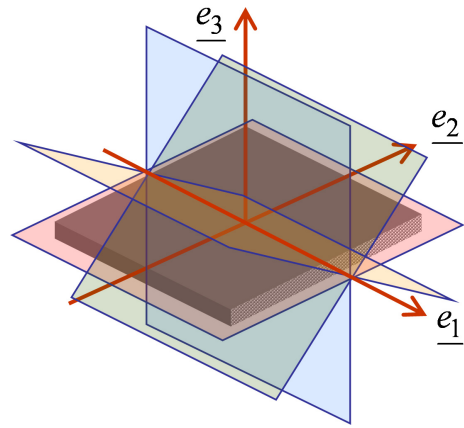


FIGURE 2.5 – Un pli unidirectionnel en fibres de carbone noyé dans une résine présentant une infinité de plans de symétrie passant par l'axe de symétrie $e_1 \Rightarrow$ comportement « élastique linéaire » (en première approximation) et orthotrope de révolution

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.11)$$

où E , G et ν sont respectivement le *module d'YOUNG* ou *module d'élasticité*, le *module de COULOMB* ou *module de cisaillement* et le *coefficient de POISSON*. **Un seul essai de traction suffit à caractériser le comportement d'un matériau homogène élastique linéaire isotrope.** La relation précédente s'exprime aussi sous la *forme tensorielle classique* connue sous le nom de *loi de HOOKE généralisée*.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = -\frac{\nu}{E} (\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} + \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} \quad (2.12)$$

ou l'inverse

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda (\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (2.13)$$

Les relations entre les différents coefficients s'écrivent :

$$\begin{cases} E = \mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \\ \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases} \quad (2.14)$$

3 Loi de comportement du pli

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'échelle méso c'est-à-dire à celle des plis (Fig. 1.6 – 1.7). Le comportement du pli est défini dans le plan à partir de la loi de comportement élastique linéaire orthotrope. On montre ensuite que ces propriétés peuvent être déduites par *homogénéisation micromécanique*. On s'intéresse enfin au comportement du pli hors de ses axes d'orthotropie.

3.1 Comportement plan

Hypothèse 1 - On suppose que le pli possède un comportement élastique orthotrope ou orthotrope unidirectionnel.

Hypothèse 2 - On suppose que le pli est en contraintes planes :

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \tag{3.1}$$

On considère un nouveau repère appelé *repère du pli* dont la première direction est la direction des fibres (notée t), la seconde est la direction transverse aux fibres (notée l) et la troisième est la normale au pli (Fig. 3.1). Ce repère est le *repère d'orthotropie*. D'après ce qui précède, la loi de comportement, en changeant la notation de la matrice de rigidité $\underline{\underline{C}}$ en $\underline{\underline{Q}}$ et en notant l à la place de 1, t à la place de 2 et lt à la place de 6 (ou 12), s'écrit sous la forme suivante :

$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}$ ou $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}$ avec $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{S}}^{-1}$ (3.2)

en notant

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \sigma_{lt} \end{bmatrix} ; \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ 2\varepsilon_{lt} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_l} & -\frac{\nu_{lt}}{E_l} & 0 \\ -\frac{\nu_{tl}}{E_t} & \frac{1}{E_t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{lt}} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \frac{\nu_{lt}}{E_l} = \frac{\nu_{tl}}{E_t} \tag{3.4}$$

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} \bar{E}_l & \nu_{tl}\bar{E}_l & 0 \\ \nu_{lt}\bar{E}_t & \bar{E}_t & 0 \\ 0 & 0 & G_{lt} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \nu_{lt}E_t = \nu_{tl}E_l \tag{3.5}$$

en notant $\bar{E}_l = E_l / (1 - \nu_{lt}\nu_{tl})$ et $\bar{E}_t = E_t / (1 - \nu_{lt}\nu_{tl})$.

REMARQUE. Dans le cas de plis tissés, la loi de comportement n'est pas changée. En revanche, dans le cas de plis tissés équilibrés, les relations précédentes se simplifient en notant que $E_l = E_t$ et $\nu_{lt} = \nu_{tl}$.

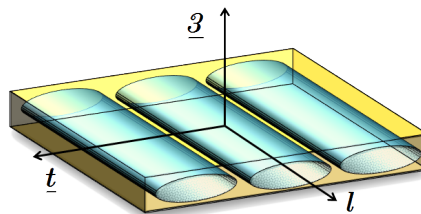


FIGURE 3.1 – Repère d'orthotropie (les torons ou mèches représentés sur la figure sont constitués de plusieurs milliers de fibres)

3.2 Propriétés du pli par homogénéisation

Pour caractériser la quantité de renfort dans le composite, on introduit la fraction massique de fibre et de matrice

$$M_f = \frac{\text{masse de renfort}}{\text{masse totale}} \quad \text{et} \quad M_m = \frac{\text{masse de matrice}}{\text{masse totale}} \quad \Rightarrow \quad M_m = 1 - M_f \quad (3.6)$$

et le taux de fibre et de matrice

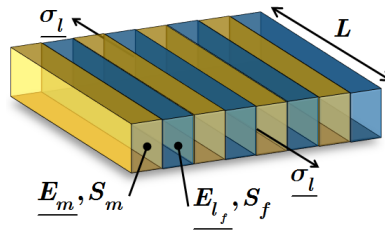
$$V_f = \frac{\text{volume de renfort}}{\text{volume total}} \quad \text{et} \quad V_m = \frac{\text{volume de matrice}}{\text{volume total}} \quad \Rightarrow \quad V_m = 1 - V_f \quad (3.7)$$

3.2.1 Propriétés de rigidité

Les modules d'élasticité du pli peuvent être approchés par un calcul analytique simplifié, en faisant l'hypothèse que tous ce passe comme si l'assemblage fibre/matrice était équivalent à un assemblage de ressorts.

Dans le cas du module longitudinal, on considère que le comportement est celui de ressorts en parallèles :

$$k = k_f + k_m \quad \Rightarrow \quad \frac{E_l S}{L} = \frac{E_{l_f} S_f}{L} + \frac{E_m S_m}{L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_l = E_{l_f} V_f + E_m (1 - V_f)} \quad (3.8)$$

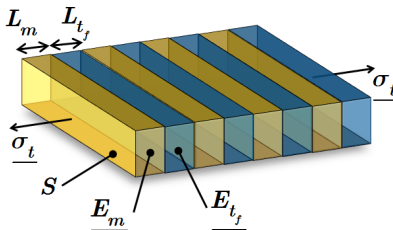


Cette loi est appelée *loi des mélanges*. En général le module longitudinal de la fibre est très grand devant celui de la résine, il vient :

$$E_{l_f} \gg E_m \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_l \approx E_{l_f} V_f} \quad (3.9)$$

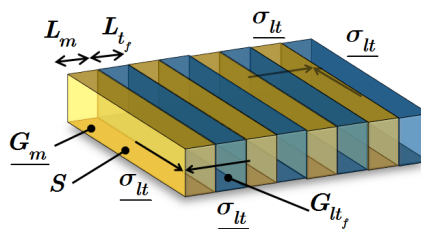
Dans le cas du module transverse, on considère que le comportement est celui de ressorts en séries :

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_f} + \frac{1}{k_m} \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{E_t S} = \frac{L_f}{E_{t_f} S} + \frac{L_m}{E_m S} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_t = \frac{E_{t_f} E_m}{V_f E_m + (1 - V_f) E_{t_f}}} \quad (3.10)$$



Dans le cas du module de cisaillement, on a de même

$$\boxed{G_{lt} = \frac{G_{lt_f} G_m}{V_f G_m + (1 - V_f) G_{lt_f}}} \quad (3.11)$$



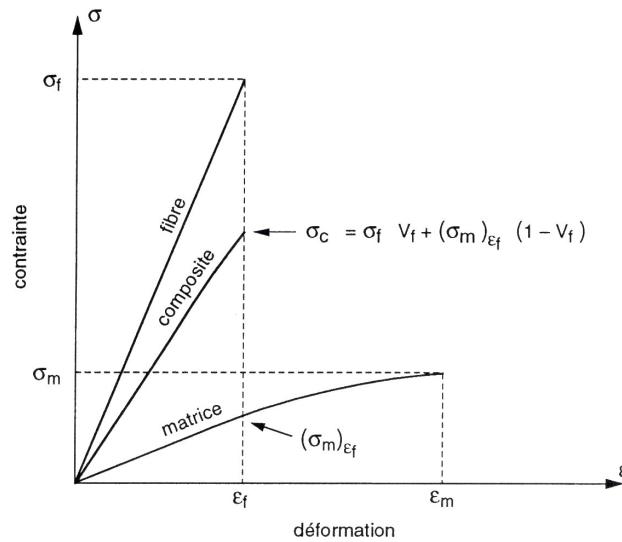


FIGURE 3.2 – Comportement longitudinal et résistance d'un matériau composite [Ber05]

En général le module de cisaillement de la fibre est très grand devant celui de la résine, il vient :

$$G_{lt_f} \gg G_m \Rightarrow \boxed{G_{lt} \approx \frac{G_m}{1 - V_f}} \quad (3.12)$$

Finalement, on considère que le coefficient de Poisson correspond à un assemblage de ressorts en parallèles :

$$\boxed{\nu_{lt} = \nu_{lt_f} V_f + \nu_m (1 - V_f)} \quad (3.13)$$

REMARQUE. Ces lois sauf la première ne donnent que des valeurs approchées. En particulier, il est très difficile d'estimer les valeurs de rigidité transverse, en cisaillement, et le coefficient de Poisson de la fibre.

3.2.2 Propriétés de résistance

La résistance longitudinale peut aussi être estimée à partir d'approches similaires. En faisant l'hypothèse que la déformation longitudinale des fibres et de la matrice est la même

$$\varepsilon_l = \varepsilon_{l_f} = \varepsilon_m \quad (3.14)$$

il vient

$$\sigma_l = E_l \varepsilon_l \quad ; \quad \sigma_{l_f} = E_{l_f} \varepsilon_l \quad \Rightarrow \quad \sigma_l = \frac{E_l}{E_{l_f}} \sigma_{l_f} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_l = \sigma_{l_f} \left(V_f + \frac{E_m}{E_{l_f}} (1 - V_f) \right)} \quad (3.15)$$

Ce comportement est observé sur la Fig. 3.2 quand la déformation à rupture de la fibre est plus petite que celle de la matrice ($\varepsilon_{l_f}^+ \leq \varepsilon_m^+$) et que le comportement des deux matériaux est quasi-linéaire. Dans ce cas, la résistance est donnée par la relation :

$$\boxed{\sigma_l^+ = \sigma_{l_f}^+ \left(V_f + \frac{E_m}{E_{l_f}} (1 - V_f) \right)} \quad (3.16)$$

3.2.3 Valeurs typiques pour des unidirectionnels fibres/époxy

Les caractéristiques de plusieurs unidirectionnels fibres/époxy sont données dans le TAB. 3.1 d'après [Rou05].

			Verre	Kevlar	Bore	Carbone			
			E	49		AS4 (HS)	T300 (IM)	P75 (HM)	P120S (UHM)
Masse volumique	ρ	kg/m ³	2080	1350	1950	1530	1600	1650	1650
Module									
Sens longitudinal	E_l	GPa	45	85	204	134	181	338	524
Sens transverse	E_t	GPa	12	5.6	18.5	7	10.3	6.9	5.7
De cisaillement	G_{lt}	GPa	4.5	2.1	5.59	4.2	7.17	5.9	5.5
Coefficient de Poisson	ν_{lt}	-	0.3	0.34	0.23	0.25	0.28	0.3	0.32
Contrainte de rupture									
En traction longi.	$\sigma_l^+ = X$	MPa	1250	1410	1400	1270	1500	966	1442
En compression longi.	$\sigma_l^- = X'$	MPa	600	280	235	1130	1500	442	270
En traction transverse	$\sigma_t^+ = Y$	MPa	35	28	12	42	40	33	21
En compression transv.	$\sigma_t^- = Y'$	MPa	141	141	53	140	246		
En cisaillement	$\sigma_{lt} = S$	MPa	63	45	34	60	68	55	27
Interlaminaire	σ_{inter}	MPa	80	60		90	90		
Coefficient de dilatation									
Sens longitudinal à 20°	α_l	°C ⁻¹	0.4/0.7e ⁻⁵	-0.4e ⁻⁵		-0.12e ⁻⁵			
Sens transverse à 20°	α_t	°C ⁻¹	1.6/2e ⁻⁵	5.8e ⁻⁵		3.4e ⁻⁵			

TABLE 3.1 – Propriétés d'unidirectionnels fibres/époxy

3.2.4 Valeurs typiques pour des bidirectionnels fibres/époxy

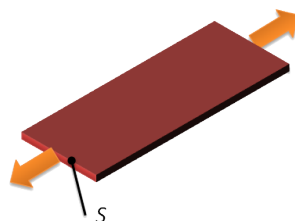
3.3 Pli composite vs. matériaux conventionnels (avec ou sans « effet de structure »)

Le TAB. 3.2 regroupe les caractéristiques de quelques matériaux usuels.

Matériaux	ρ	E	ν	$R_e = \sigma_e$	$R_m = \sigma_m$	E/d	R_e/d
	kg.m ⁻³	GPa	-	MPa	MPa	GPa	MPa
Acier E335	7800	210	0.29	335	570	26.9	43
Acier 35 Ni Cr Mo 16	7900	210	0.30	770	980	26.6	97
Aluminium pur	2600	67.5	0.34	30	80	26.0	12
Alliage d'aluminium Al Cu 4 Mg	2700	74	0.33	240	390	27.4	89
Titane	4500	110	0.33	260	350	24.4	58
Alliage de titane Ti Al 6 V	4450	105	0.33	920	1060	23.6	207
Cuivre	2700	100	0.34	40	200	37.0	15
Alliage de cuivre Cu Sn 8 P	2700	130	0.34	290	390	48.1	107
Fibre de verre E/résine époxy*	2600	74	0.25	2500	fragile	28.5	962
Fibre de kevlar 49/résine époxy*	1450	130	0.40	2900	fragile	89.7	2000
Fibre de carbone HM/résine époxy*	1800	390	0.35	2500	fragile	216.7	1389
Plexiglass	1800	2.9	0.40	80	90	1.6	44

TABLE 3.2 – Caractéristiques mécaniques de matériaux usuels où $d = \rho/1000$ est la densité du matériau (*traction dans la direction des fibres)

3.3.1 Comportement en membrane (tension)



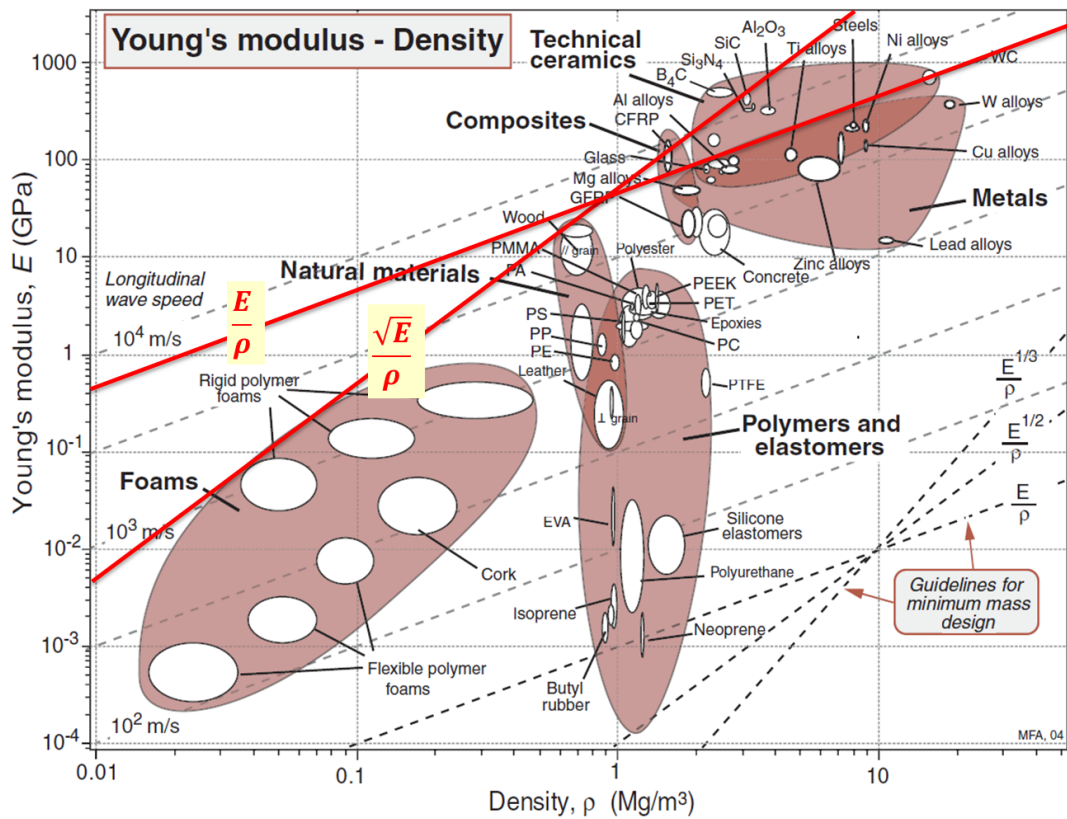
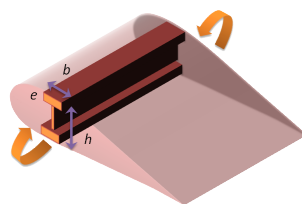


FIGURE 3.3 – Diagramme d'Ashby : module d'Young vs. masse volumique [AJ13]

On peut montrer aisément que si on cherche à minimiser la masse d'une plaque (longueur fixée, S variable) vis-à-vis du problème de membrane en tension cela correspond à :

1. maximiser le module spécifique $\frac{E}{\rho}$ pour une solution iso-rigidité (FIG. 3.3)
2. maximiser la résistance spécifique $\frac{\sigma_f}{\rho}$ pour une solution iso-contrainte (FIG. 3.4)

3.3.2 Comportement en flexion



On peut montrer que si on cherche à minimiser la masse d'une poutre ou d'un longeron (longueur, largeur (b) et hauteur (h) donnés, épaisseur des semelles e variable) vis-à-vis du problème de flexion cela correspond à :

- maximiser $\frac{\sqrt{E}}{\rho}$ pour une solution iso-rigidité (FIG. 3.3)
- maximiser $\frac{2/\sqrt[3]{\sigma_f}}{\rho}$ pour une solution iso-contrainte (FIG. 3.4)

3.3.3 Comparaison des matériaux (diagrammes d'Ashby)

3.4 Propriétés du pli hors des axes d'orthotropie

On s'intéresse maintenant aux propriétés du pli hors des axes d'orthotropie. On rappelle que dans le repère d'orthotropie la loi de comportement s'écrit

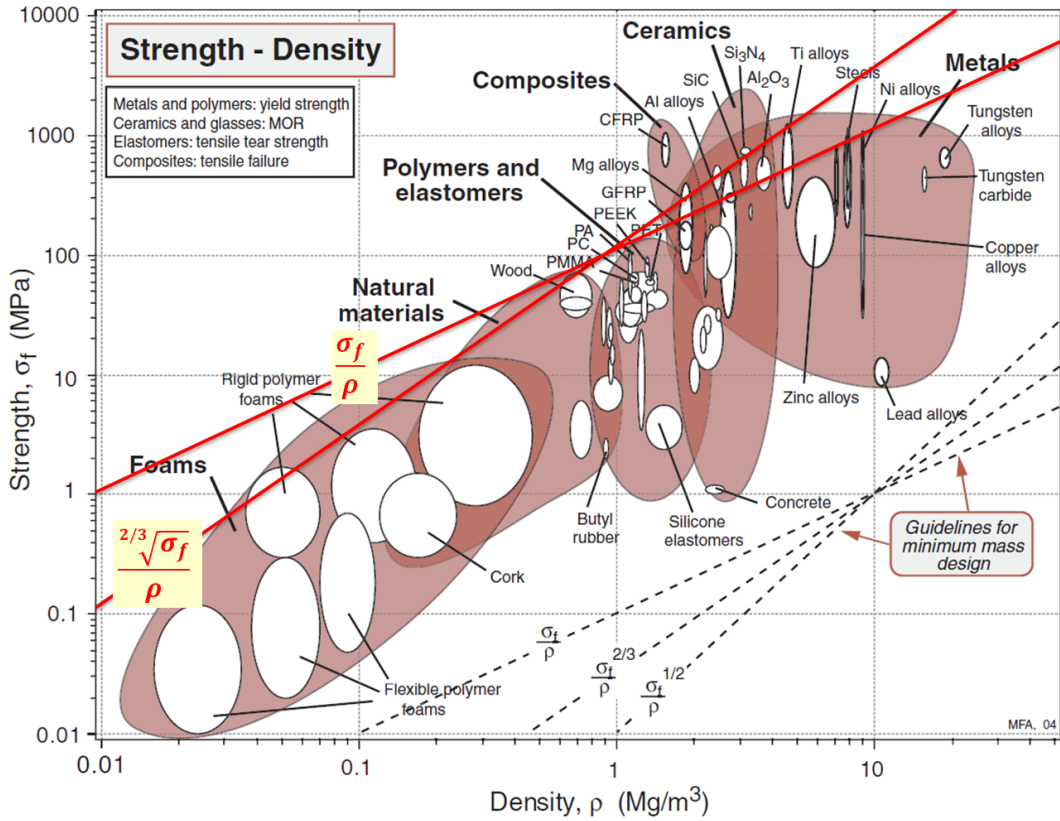


FIGURE 3.4 – Diagramme d’Ashby : résistance vs. masse volumique [AJ13]

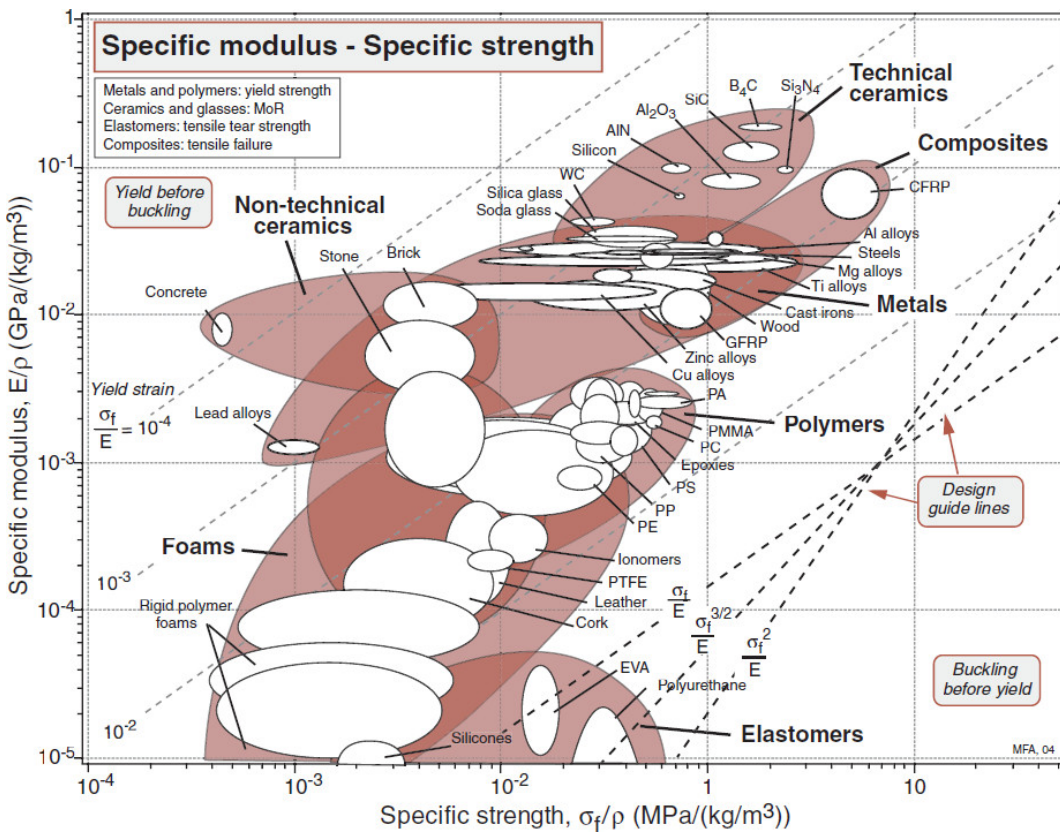


FIGURE 3.5 – Diagramme d’Ashby : module spécifique vs. résistance spécifique [AJ13]

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_l} & -\frac{\nu_{lt}}{E_l} & 0 \\ -\frac{\nu_{lt}}{E_t} & \frac{1}{E_t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{lt}} \end{bmatrix} \cdot \underline{\sigma} \quad (3.17)$$

On considère un nouveau repère appelé *repère du stratifié* ($x, y, z = e_3$) avec $\theta = (l, x) = (t, y)$. Le comportement dans ce repère va être obtenu par rotation du tenseur. Cependant, cette opération doit être écrite avec les notations classiques. En contraintes planes, les contraintes dans le repère du pli en fonction de celles dans le repère du stratifié (notée) s'écrivent

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{P} \cdot \underline{\underline{\hat{\sigma}}} \cdot \underline{P}^{-1} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_l & \sigma_{lt} & 0 \\ \sigma_{lt} & \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{\hat{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{P} = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

en notant $c = \cos \theta$ et $s = \sin \theta$, soit après calculs

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x c^2 - \sigma_{xy} 2sc + \sigma_y s^2 & \frac{1}{2}(2sc(\sigma_x - \sigma_y) + 2\sigma_{xy}(c^2 - s^2)) & 0 \\ \frac{1}{2}(2sc(\sigma_x - \sigma_y) + 2\sigma_{xy}(c^2 - s^2)) & \sigma_x s^2 + 2\sigma_{xy}sc + \sigma_y c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Cette opération peut être écrite en vectoriel sous la forme suivante

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{R}_{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\hat{\sigma}}} \quad ; \quad \underline{\underline{\hat{\varepsilon}}} = \underline{R}_{\underline{\underline{\varepsilon}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\hat{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{\hat{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

avec

$$\underline{R}_{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{R}_{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

On en déduit aisément la nouvelle matrice de souplesse

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{S} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\hat{\varepsilon}}} = \underline{R}_{\underline{\underline{\varepsilon}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{R}_{\underline{\underline{\varepsilon}}} \cdot \underline{S} \cdot \underline{R}_{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\hat{\sigma}}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\hat{S}}} = \underline{R}_{\underline{\underline{\varepsilon}}} \cdot \underline{S} \cdot \underline{R}_{\underline{\underline{\sigma}}} \quad (3.22)$$

Finalement, après calculs, on obtient la loi de comportement du pli en souplesse dans le repère du stratifié :

$\underline{\underline{\hat{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\hat{S}}} \cdot \underline{\underline{\hat{\sigma}}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\hat{S}}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_x} & \frac{\eta_{x,xy}}{G_{xy}} \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{\eta_{y,xy}}{G_{xy}} \\ \frac{\eta_{xy,x}}{E_x} & \frac{\eta_{xy,y}}{E_y} & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \quad (3.23)$

il vient

$$E_x(\theta) = \frac{1}{\frac{c^4}{E_l} + \frac{s^4}{E_t} + s^2 c^2 \left(\frac{1}{G_{lt}} - 2 \frac{\nu_{lt}}{E_l} \right)} \quad (3.24)$$

$$E_y(\theta) = \frac{1}{\frac{s^4}{E_l} + \frac{c^4}{E_t} + s^2 c^2 \left(\frac{1}{G_{lt}} - 2 \frac{\nu_{lt}}{E_l} \right)} \quad (3.25)$$

$$G_{xy}(\theta) = \frac{1}{\frac{(c^2 - s^2)^2}{G_{lt}} + 4s^2 c^2 \left(\frac{1}{E_l} + \frac{1}{E_t} + \frac{2\nu_{lt}}{E_l} \right)} \quad (3.26)$$

$$\frac{\nu_{xy}}{E_x}(\theta) = \frac{1}{s^2 c^2 \left(\frac{1}{G_{lt}} - \frac{1}{E_l} - \frac{1}{E_t} \right) + \frac{\nu_{lt}}{E_l} (c^4 + s^4)} = \frac{\nu_{yx}}{E_y} \quad (3.27)$$

$$\frac{\eta_{xy,x}}{E_x}(\theta) = 2sc \left((s^2 - c^2) \left(\frac{\nu_{lt}}{E_l} - \frac{1}{2G_{lt}} \right) + \frac{s^2}{E_t} - \frac{c^2}{E_l} \right) = \frac{\eta_{x,xy}}{G_{xy}} \quad (3.28)$$

$$\frac{\eta_{xy,y}}{E_y}(\theta) = 2sc \left((c^2 - s^2) \left(\frac{\nu_{lt}}{E_l} - \frac{1}{2G_{lt}} \right) + \frac{c^2}{E_t} - \frac{s^2}{E_l} \right) = \frac{\eta_{y,xy}}{G_{xy}} \quad (3.29)$$

On trace l'évolution des principaux modules sur la Fig. 3.6. Ce comportement est toujours un comportement orthotrope mais hors des axes d'orthotropie.

On peut obtenir avec un calcul similaire la loi de comportement en rigidité :

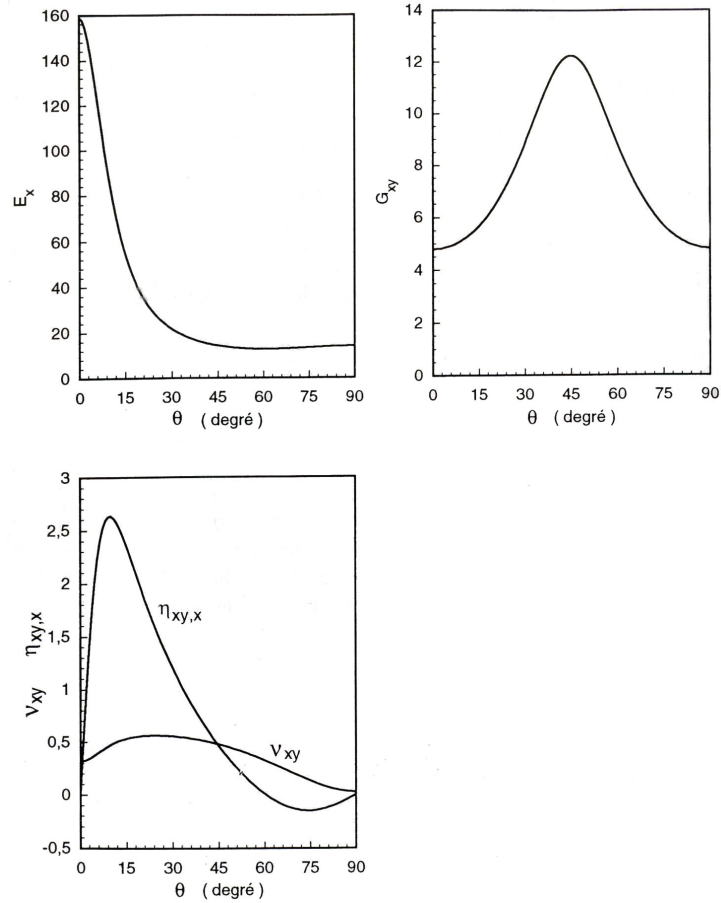


FIGURE 3.6 – Évolution des modules d'élasticité en fonction de θ pour un matériau carbone/epoxy [Ber05]

$$\underline{\hat{\sigma}} = \underline{\hat{Q}} \cdot \underline{\hat{\varepsilon}} \quad \text{avec} \quad \underline{\hat{Q}} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} & \hat{Q}_{16} \\ \hat{Q}_{21} & \hat{Q}_{22} & \hat{Q}_{26} \\ \hat{Q}_{61} & \hat{Q}_{62} & \hat{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

avec

$$\hat{Q}_{11}(\theta) = c^4 \bar{E}_l + s^4 \bar{E}_t + 2s^2 c^2 (2\bar{G}_{lt} + \nu_{tl} \bar{E}_l) \quad (3.31)$$

$$\hat{Q}_{22}(\theta) = s^4 \bar{E}_l + c^4 \bar{E}_t + 2s^2 c^2 (2\bar{G}_{lt} + \nu_{tl} \bar{E}_l) \quad (3.32)$$

$$\hat{Q}_{66}(\theta) = (c^2 - s^2)^2 G_{lt} + s^2 c^2 (\bar{E}_l + \bar{E}_t - 2\nu_{tl} \bar{E}_l) \quad (3.33)$$

$$\hat{Q}_{12}(\theta) = (c^4 + s^4) \nu_{tl} \bar{E}_l + s^2 c^2 (\bar{E}_l + \bar{E}_t - 4G_{lt}) \quad (3.34)$$

$$\hat{Q}_{16}(\theta) = sc ((c^2 - s^2) (\nu_{tl} \bar{E}_l - 2G_{lt}) - c^2 \bar{E}_l + s^2 \bar{E}_t) \quad (3.35)$$

$$\hat{Q}_{26}(\theta) = sc ((s^2 - c^2) (\nu_{tl} \bar{E}_l - 2G_{lt}) - s^2 \bar{E}_l + c^2 \bar{E}_t) \quad (3.36)$$

en rappelant que $\bar{E}_l = E_l / (1 - \nu_{lt}\nu_{tl})$ et $\bar{E}_t = E_t / (1 - \nu_{lt}\nu_{tl})$.

4 Théorie des stratifiés

Un pli en composite à matrice organique mesure entre 0.1 et 0.3 mm. Il est généralement trop mince pour être utilisé tout seul. Plusieurs plis vont être empilés pour constituer ce que l'on appelle un *stratifié*. L'orientation de ces plis devra être judicieusement choisi en fonction des sollicitations mécaniques. C'est tout l'**intérêt de ces matériaux composites**. Il faudra toutefois faire attention aux problèmes de *couplages* mécaniques liés à l'*anisotropie* du matériau.

Dans ce chapitre, on abordera la *théorie des poutres stratifiées* et la *théorie des stratifiés*. Ces deux théories correspondent à la modélisation à l'« échelle macro » du matériau composite stratifié (FIG. 1.6 – 1.7).

4.1 Définitions et notations

La composition du stratifié est appelée la *séquence d'empilement*. Elle est notée sous la forme suivante : $[\dots, \theta_m, \dots]_{ns}$ où θ est l'orientation de la couche i (toujours en degré), m est le nombre de plis de la couche i , n est le nombre de répétition de la séquence et si besoin, s signifie que la séquence doit être symétrique. On donne deux exemples sur la FIG. 4.1. La séquence commence toujours par la couche inférieure car c'est le premier pli posé par l'opérateur.

Hypothèse des stratifiés. *Les plis sont parfaitement liés entre eux. Cette hypothèse est réaliste tant que le stratifié ne présente pas de délaminage.*

On définit le paramétrage de la position des plis sur la FIG. 4.2.

4.2 Poutres stratifiées

Avant de traiter le cas des plaques avec la théorie des stratifié, intéressons nous à la théorie des *poutres stratifiées*.

L'anisotropie et l'hétérogénéité des stratifiés ne remet pas en cause les trois hypothèses de base de la *théorie des poutres* [Mon13].

PRINCIPE DE SAINT-VENANT. *L'état de contrainte et de déformation loin des zones d'applications des forces (les liaisons) ne dépend que du torseur des efforts extérieurs et non de la répartition de ces efforts.*

HYPOTHÈSE DE NAVIER. *Les sections droites de poutre restent droites pendant la déformation de la poutre.*

HYPOTHÈSE D'EULER-BERNOULLI. *Les sections droites de poutre restent orthogonales à la ligne moyenne pendant la déformation de la poutre.*

En revanche, la répartition des contraintes au sein de la poutre sera différente, et dépendra de l'orientation des plis. Les relations de comportement de la théorie des poutres devront être adaptées.

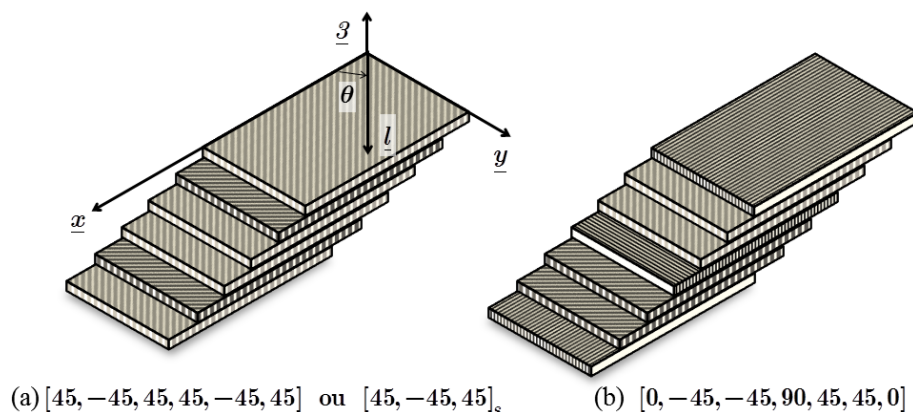


FIGURE 4.1 – Exemples de séquences d'empilement

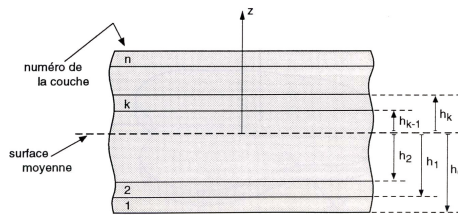
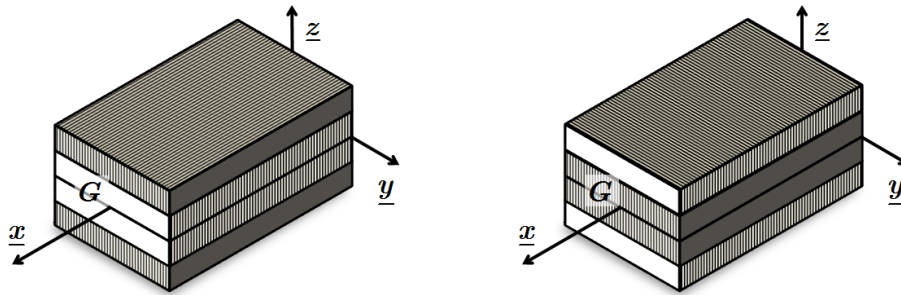


FIGURE 4.2 – Définition de la position des plis dans le stratifié [Ber05]

4.2.1 Cas de la poutre $[0, 90]_s$ ou $[90, 0]_s$ en tension



On considère que la déformation est la même partout, d'où :

$$\begin{aligned}\sigma_{x_0} &= E_l \varepsilon_x \\ \sigma_{x_{90}} &= E_t \varepsilon_x\end{aligned}$$

L'effort normal s'écrit d'après le problème de Saint-Venant :

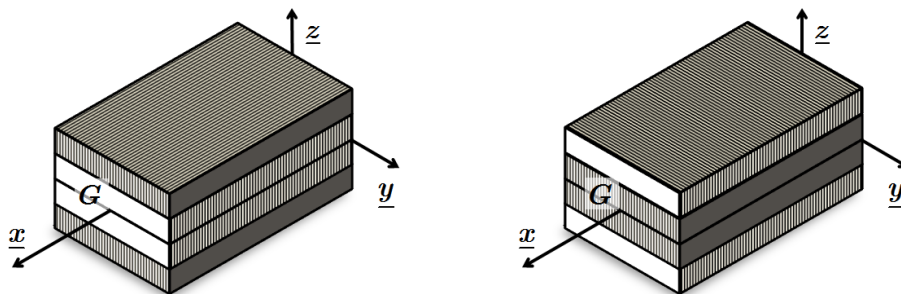
$$\begin{aligned}N &= \int_S \sigma_x dS \\ &= \sigma_{x_0} \frac{S}{2} + \sigma_{x_{90}} \frac{S}{2} \\ &= \frac{S}{2} (E_l + E_t) \varepsilon_x \\ &= S E_{hom} \varepsilon_x\end{aligned}$$

d'où le module homogénéisé en tension

$$E_{hom} = \frac{E_l + E_t}{2}$$

Le résultat est indépendant de l'ordre des plis.

4.2.2 Cas de la poutre $[0, 90]_s$ ou $[90, 0]_s$ en flexion pure



On considère que la déformation évolue linéairement dans la hauteur de la poutre $[90, 0]_s$, d'où :

$$\begin{aligned}\sigma_{x_0} &= E_l \varepsilon_x \\ \sigma_{x_{90}} &= E_t \varepsilon_x\end{aligned}$$

avec

$$\varepsilon_x = \gamma_y z$$

L'effort normal s'écrit d'après le problème de Saint-Venant :

$$\begin{aligned} M_{f_y} &= \int_S \underbrace{\sigma_x z}_{bdz} dS \\ &= \sum_{i=1}^4 b \int_{h_i}^{h_{i+1}} \sigma_{x_i} z dz \\ &= b\gamma_y \left(E_t \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{4}} z^2 dz + E_l \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{h}{4}} z^2 dz + E_t \int_{\frac{h}{4}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz \right) \\ &= b\gamma_y \left(E_t \frac{h^3}{3 \times 8} \left(-\frac{1}{8} + 1 + 1 - \frac{1}{8} \right) + E_l \frac{h^3}{3 \times 8^2} (1 + 1) \right) \\ &= \frac{bh^3}{12} \left(\frac{7}{8} E_t + \frac{1}{8} E_l \right) \gamma_y \end{aligned}$$

d'où la raideur homogénéisée de la poutre en flexion

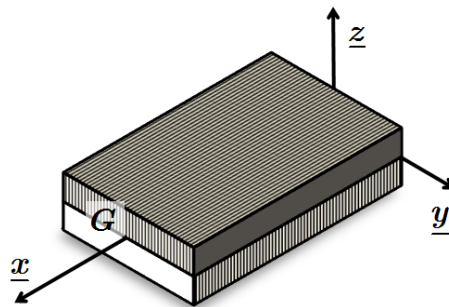
$$(EI_{G_z})_{hom} = \frac{bh^3}{12} \frac{7E_t + E_l}{8}$$

Dans le cas de la poutre $[0, 90]_s$, on aura alors :

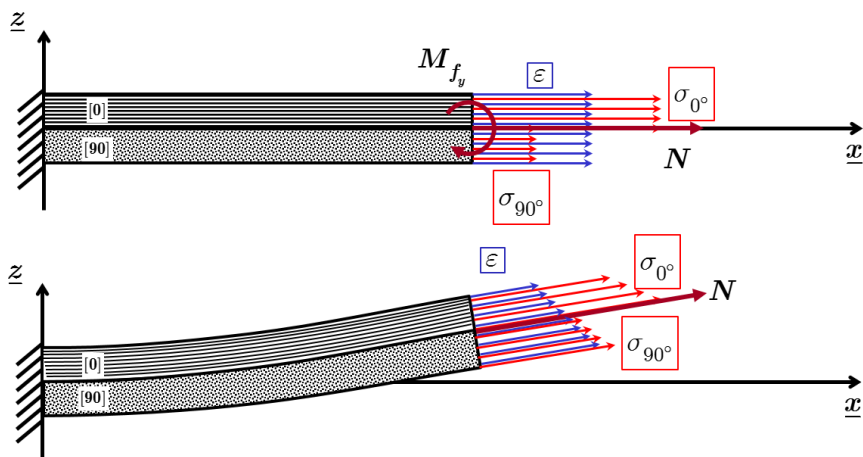
$$(EI_{G_z})_{hom} = \frac{bh^3}{12} \frac{7E_l + E_t}{8}$$

Le résultat est dépendant de l'ordre des plis.

4.2.3 Cas de la poutre $[90, 0]$ en tension : couplages hors-plan



L'analyse des contraintes dans un $[0,90]$ soumis à de la traction N permet de mettre en évidence un couplage traction/flexion. En effet, soit le déséquilibre est compensé par moment de flexion extérieur, soit la poutre se courbe comme on peut le voir sur le dessin.



Une conséquence notable de ce couplage concerne le comportement des stratifiés lorsqu'ils se refroidissent après leur fabrication à chaud. En effet, la dilatation thermique d'un pli est anisotrope, tout comme son comportement mécanique : lors d'une variation de température, les plis se déforment beaucoup moins parallèlement aux fibres que perpendiculairement. Par conséquent, un stratifié [0,90] initialement plan va avoir tendance à se gondoler au cours du refroidissement comme on peut le voir sur la FIG. 4.3 [Gen11].

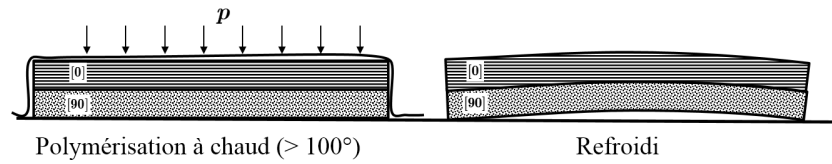


FIGURE 4.3 – Comportement d'un [0,90] lors du refroidissement après fabrication à chaud

4.3 Théorie des stratifiés

En réalité, l'approche poutre précédente ne fonctionne pas bien car elle oublie les effets de stratification dans les autres directions, comme les effets de Poisson. Un stratifié est donc plutôt considéré comme une plaque c'est-à-dire une structure plane ayant deux grandes dimensions devant la troisième. Dans la pratique, les pièces en composite stratifiées sont très souvent des coques, c'est-à-dire, des « plaques courbées ». Cependant, les rayons de courbures des pièces sont assez grands et la théorie des plaques sera généralement suffisante pour calculer les champs locaux.

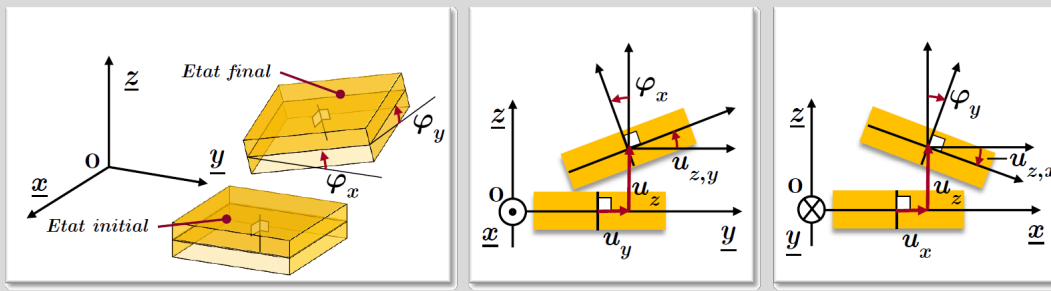
4.3.1 Cinématique

On considère une plaque stratifiée de faible épaisseur constituée de n plis et appartenant au plan (x, y) .

Hypothèse h.p.p. On se place en hypothèses de petites perturbation (h.p.p.).

Hypothèses de KIRCHOFF-LOVE. On se place dans le cadre de la théorie des plaques de KIRCHOFF-LOVE :

- un segment orthogonal au plan moyen de la plaque reste droit après déformation (schéma dit du premier degré);
- un segment orthogonal au plan moyen de la plaque reste orthogonal à la surface moyenne après déformation. Ce qui équivaut à dire que l'on néglige le cisaillement transverse ($\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$).



En théorie des poutres, ces deux dernières hypothèses sont équivalentes respectivement aux hypothèses de Navier et de Euler-Bernoulli.

Avec la première hypothèse, le champ de déplacement \underline{u} peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = u_x^0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \\ u_y(x, y, z) = u_y^0(x, y) - z\varphi_x(x, y) \\ u_z(x, y, z) = u_z^0(x, y) \end{cases} \quad (4.1)$$

où \underline{u}^0 est le champ de déplacement du plan moyen. La deuxième hypothèse permet de dire que les angles de rotation du segment (φ) peuvent s'écrire $\varphi_x = \frac{\partial u_z}{\partial y}$ et $\varphi_y = -\frac{\partial u_z}{\partial x}$. Sachant que $\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} \underline{u} + {}^t \underline{\text{grad}} \underline{u})$ d'après l'hypothèse

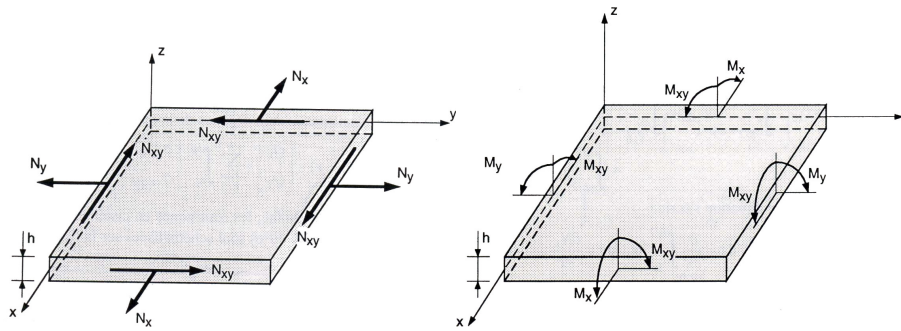


FIGURE 4.4 – Forces et moments généralisés dans une plaque [Ber05]

h.p.p., le champ de déformation de la plaque peut être déduit du champ précédent

$$\begin{cases} \varepsilon_x(x, y, z) = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_x^0(x, y) + zk_x(x, y) \\ \varepsilon_y(x, y, z) = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \varepsilon_y^0(x, y) + zk_y(x, y) \\ \varepsilon_{xy}(x, y, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \varepsilon_{xy}^0(x, y) + zk_{xy}(x, y) \end{cases} \quad (4.2)$$

où $\underline{\varepsilon}^0$ et \underline{k} sont le champ de déformation et les courbures du plan moyen. D'après la nullité du cisaillement transverse, les courbures sont égales à $k_x = -\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}$, $k_y = -\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}$ et $k_{xy} = -\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}$. D'où, la nouvelle écriture du champ de déformation de la plaque :

$$\underline{\hat{\varepsilon}} = \underline{\varepsilon}^0 + z\underline{k} \quad (4.3)$$

4.3.2 Contraintes

Hypothèse. La théorie des plaques suppose que les contraintes normales à la plaque σ_{zz} sont négligeables.

En négligeant le cisaillement transverse, le champ de contrainte se réduit aux contraintes de membranes

$$\underline{\hat{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \underline{\hat{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Par conséquent, la plaque est dans un **état de contraintes planes**. Les contraintes dans un pli du stratifié sont obtenues à partir de la loi de comportement élastique orthotrope, hors du repère d'orthotropie (Éq. (3.30))

$$\underline{\hat{\sigma}} = \underline{\hat{Q}} \cdot \underline{\hat{\varepsilon}} \quad \text{avec} \quad \underline{\hat{Q}} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} & \hat{Q}_{16} \\ \hat{Q}_{21} & \hat{Q}_{22} & \hat{Q}_{26} \\ \hat{Q}_{61} & \hat{Q}_{62} & \hat{Q}_{66} \end{bmatrix} = \underline{\hat{S}}^{-1} \quad \text{et} \quad \underline{\hat{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

4.3.3 Forces et moments

Un élément de plaque est soumis à :

- des forces normales en membrane par unité d'envergure de plaque : N_x et N_y ;
- une force de cisaillement en membrane par unité d'envergure de plaque : N_{xy} ;
- des moments de flexion par unité d'envergure de plaque : M_x et M_y ;
- un moment de torsion par unité d'envergure de plaque : M_{xy} .

Pour comprendre à quoi correspondent ces efforts, prenons l'exemple de N_x . Cet effort linéique est égal à l'intégrale des contraintes selon la direction z :

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz$$

Son unité est donc le N/m ou le N/mm. Pour obtenir la force appliquée au bord de la plaque en N, il suffit de multiplier cet effort N_x par l'envergure de la plaque selon y .

L'ensemble de ces forces et ces moments sont donc obtenus par intégration des contraintes selon l'épaisseur de la plaque

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (4.4)$$

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k z dz \quad (4.5)$$

En exprimant les contraintes en fonction des déformations via la loi d'élasticité orthotrope, il vient pour les forces

$$\underline{N} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \hat{Q}_{\underline{k}} \cdot (\underline{\varepsilon}^0 + z\underline{k}) dz \quad (4.6)$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \hat{Q}_{\underline{k}} \cdot \underline{\varepsilon}^0 + \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \hat{Q}_{\underline{k}} \cdot \underline{k} \quad (4.7)$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \cdot \underline{\varepsilon}^0 + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \cdot \underline{k} \quad (4.8)$$

avec

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) \hat{Q}_{ij_k} \quad (4.9)$$

et

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \hat{Q}_{ij_k} \quad (4.10)$$

De même, il vient pour les moments

$$\underline{M} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \hat{Q}_{\underline{k}} \cdot (\underline{\varepsilon}^0 + z\underline{k}) z dz \quad (4.11)$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \hat{Q}_{\underline{k}} \cdot \underline{\varepsilon}^0 + \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \hat{Q}_{\underline{k}} \cdot \underline{k} \quad (4.12)$$

$$= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \cdot \underline{\varepsilon}^0 + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \underline{k} \quad (4.13)$$

avec

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) \hat{Q}_{ij_k} \quad (4.14)$$

Finalement, on obtient l'équation constitutive d'une plaque stratifié exprimant les forces et moments en fonction des déformations en membrane et des courbures

$$\begin{bmatrix} \underline{N} \\ \underline{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{B} & \underline{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}^0 \\ \underline{k} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Dans le cas d'un stratifié quelconque il existe un couplage entre le comportement en membrane et le comportement en flexion et torsion. Ce couplage est dû à l'existence de la matrice \underline{B} .

4.3.4 Stratifiés équilibrés

Un stratifié équilibré est constitué du même nombre de plis dans les directions θ et $-\theta$. On en déduit que :

$$\hat{Q}_{16}(-\theta) = -\hat{Q}_{16}(\theta) \Rightarrow \boxed{A_{16} = 0} \quad (4.16)$$

$$\hat{Q}_{26}(-\theta) = -\hat{Q}_{26}(\theta) \Rightarrow \boxed{A_{26} = 0} \quad (4.17)$$

Les déformations de tension et de cisaillement plan sont alors découplées.

4.3.5 Stratifiés à symétrie miroir

Les stratifiés à symétrie miroir dit aussi symétriques comportent le même nombre de pli dans chacune des directions et répartis de manière symétrique. Il vient :

$$(h_k^2 - h_{k-1}^2) \hat{Q}_{ijk} = - (h_{n+1-k}^2 - h_{n-k}^2) \hat{Q}_{ijn+1-k} \Rightarrow B_{ij} = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{B} = \underline{0}} \quad (4.18)$$

Le comportement en membrane et le comportement en flexion et torsion sont alors découplés.

4.3.6 Modules apparents du comportement en membrane

On considère le cas d'un stratifié à symétrie miroir. On peut écrire le comportement orthotrope en membrane du stratifié comme celui d'un comportement orthotrope hors des axes d'orthotropies :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} = h \underline{A}^{-1} \cdot \frac{1}{h} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_x} & \frac{\eta_{x,xy}}{G_{xy}} \\ \text{sym} & \frac{1}{E_y} & \frac{\eta_{y,xy}}{G_{xy}} \\ & & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{h} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix}$$

Ces modules sont généralement calculés numériquement. Cependant dans le cas d'un matériau stratifié équilibré, le comportement en membrane se simplifie :

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \cdot \underline{\varepsilon}^0 \quad (4.19)$$

Si on considère uniquement une traction dans la direction x , il vient :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}\varepsilon_x^0 + A_{12}\varepsilon_y^0 \\ A_{12}\varepsilon_x^0 + A_{22}\varepsilon_y^0 \\ A_{66}\varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

d'où l'expression de la résultante en membrane

$$N_x = \left(A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right) \varepsilon_x^0 \quad (4.21)$$

Sachant que $\frac{N_x}{h} = \sigma_x = E_x \varepsilon_x^0$, il vient le module du stratifié dans la direction x

$$\boxed{E_x = \frac{1}{h} \left(A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right)} \quad (4.22)$$

De même, il vient

$$\boxed{E_y = \frac{1}{h} \left(A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right)} \quad (4.23)$$

$$\boxed{\nu_{xy} = \frac{A_{12}}{A_{11}}} \quad (4.24)$$

$$\boxed{G_{xy} = \frac{1}{h} A_{66}} \quad (4.25)$$

4.3.7 Équations d'équilibre des plaques

Cf. Annexe.

4.4 Comparaison des stratifiés avec les matériaux métalliques

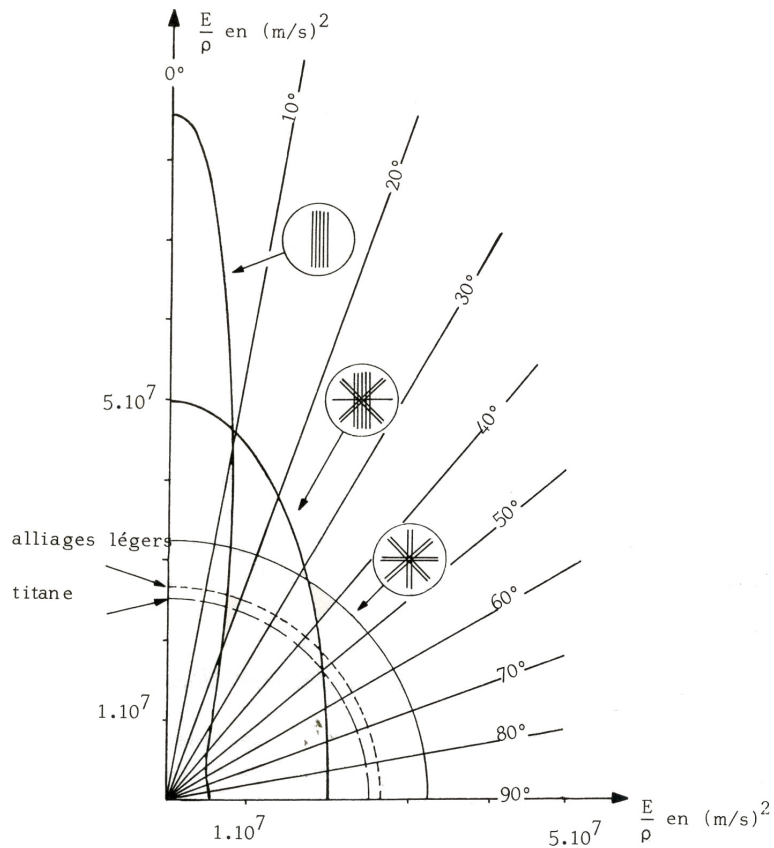


FIGURE 4.5 – Comparaison des stratifiés carbone HS/époxy (unidirectionnel, quasi-isotrope $[0, \pm 45, 90]_s$, optimisé $[0_5, 45_4, 90]$) avec les matériaux métalliques (titane et alliages légers) (source J. Rouchon)

4.5 Cas des matériaux « sandwich »

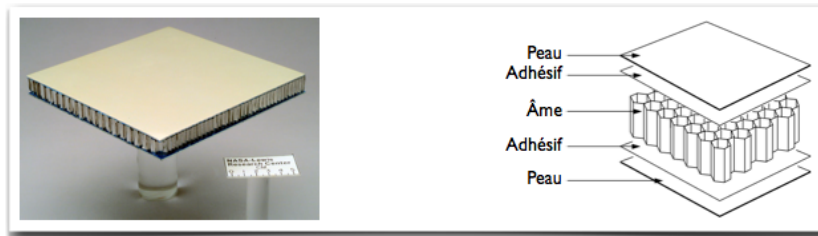


FIGURE 4.6 – Exemples de matériaux sandwich à base de nid d’abeille (source Hexcel)

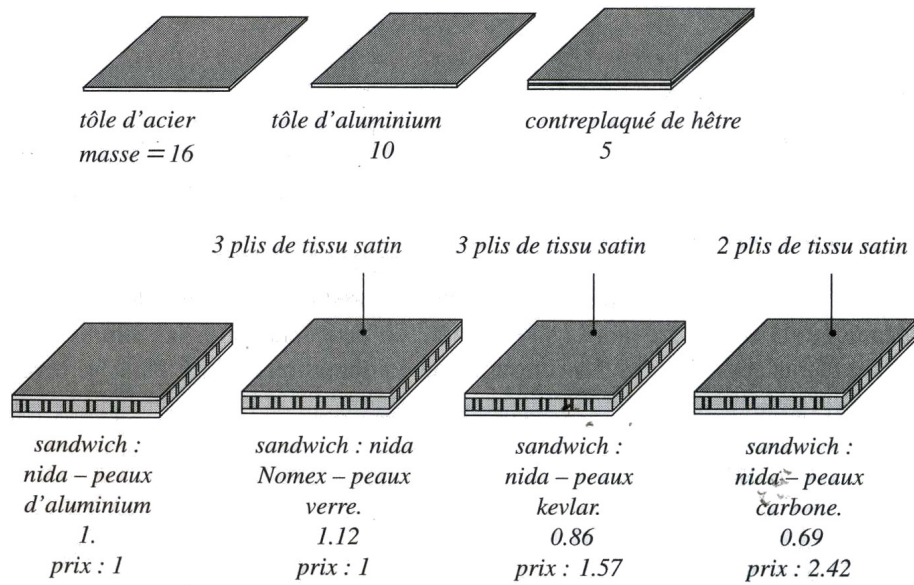


FIGURE 4.7 – Comparaison de différents matériaux ayant le même moment quadratique [Gay97]

5 Endommagement des matériaux composites

5.1 Les mécanismes d'endommagement des stratifiés

Les mécanismes d'endommagement des composites stratifiés sont nombreux et généralement complexes à modéliser. Dans une structure en matériaux composites, on peut estimer que la ruine du matériau suit les phases suivantes :

1. Endommagement diffus
 - a) microfissuration
 - b) décohésion fibre/matrice
2. Rupture (fissuration) transverse
3. Délaminage
4. Rupture des fibres

En compression, le mode rupture fibre est différent de celui décrit précédemment puisque les fibres cassent par flambage. On observe bien ce phénomène sur les micrographies présentant des « *bandes de flambage* » (« *kink-bands* »).

5.2 Comportement des composites et effets non-linéaires

5.2.1 Essai de traction dans la direction des fibres

On s'intéresse au comportement composites stratifiés dans la direction des fibres.

Les essais montrent un comportement linéaire et fragile. Ce comportement n'est généralement pas influencée par l'endommagement diffus.

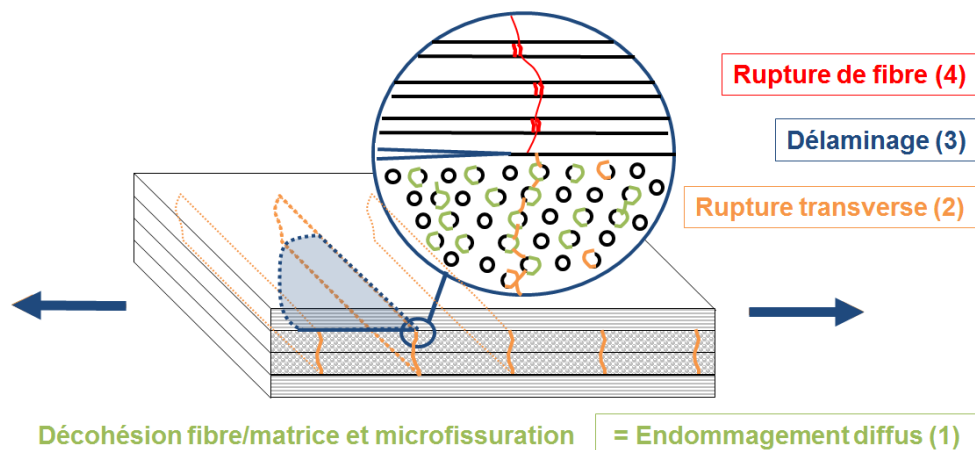


FIGURE 5.1 – Endommagement progressif d'un stratifié $[0/90]_s$ UD en traction.

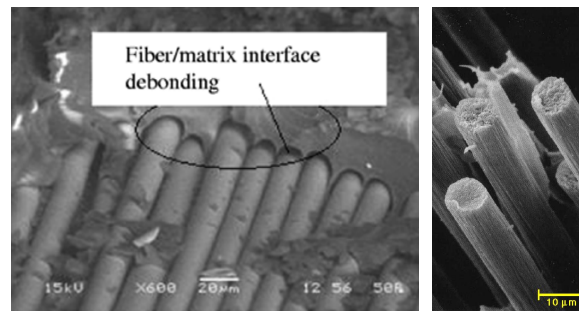


FIGURE 5.2 – Décohésion fibre/matrice et rupture des fibres

5.2.2 Essai de traction dans la direction transverse aux fibres

Un essai de traction sur un pli de tissu verre déséquilibré orienté à 90° illustre le phénomène de dégradation de la matrice : de petites fissures se forment perpendiculairement à la direction de la charge puis se propagent le long des fibres.

Le comportement dans cette direction est fortement non linéaire. Après décharge, la déformation élastique ne revient pas à zéro. Ce phénomène s'explique par la présence de viscosité et de plasticité dans la résine époxy. D'autre part on observe un changement de pente après chaque décharge. Cette perte de rigidité s'explique par la densification des fissures transverse (endommagement diffus).

5.2.3 Essai de traction hors axes et effet du cisaillement

On s'intéresse au comportement des composites stratifiés dans une direction hors axes. La direction de matériau la plus intéressante est le $+ ou - 45^\circ$. Dans ce cas, l'essai maximise le cisaillement au sein du composite. Il est d'ailleurs possible d'identifier le comportement en cisaillement par un simple calcul inverse. Pour identifier le comportement d'un unidirectionnel, on utilisera de préférence des éprouvettes équilibrées et symétriques i.e. ayant pour séquence d'empilement $[\pm 45]_{ns}$. Pour un tissu équilibré, on utilisera une séquence d'empilement $[45]_n$.

Les essais montrent un comportement fortement non linéaire. On observe les mêmes phénomènes que dans le cas précédent i.e. apparition de déformations anélastiques et diminution progressive de la rigidité.

5.3 Critères de résistance

Cette partie s'intéresse aux critères de résistance des matériaux composites. La complexité du comportement explique le nombre important de critères. La plupart des critères sont des extensions des critères utilisés pour les matériaux homogènes et isotropes. Ces critères doivent être appliqué aux plis et non aux stratifiés. Les critères sont généralement définis dans le repère d'orthotropie.

Pour les critères suivants, on se placera toujours dans les hypothèses des contraintes planes.

5.3.1 Critère en contraintes maximales

Le critère en contraintes maximales s'écrit simplement dans le repère d'orthotropie du pli :

$$-X' \leq \sigma_l \leq X \quad (5.1)$$

$$-Y' \leq \sigma_{tt} \leq Y \quad (5.2)$$

$$|\sigma_{lt}| \leq S \quad (5.3)$$

où X , X' , Y , Y' et S sont respectivement la résistance en traction longitudinale, en compression longitudinale, en traction transverse, en compression transverse et en cisaillement.

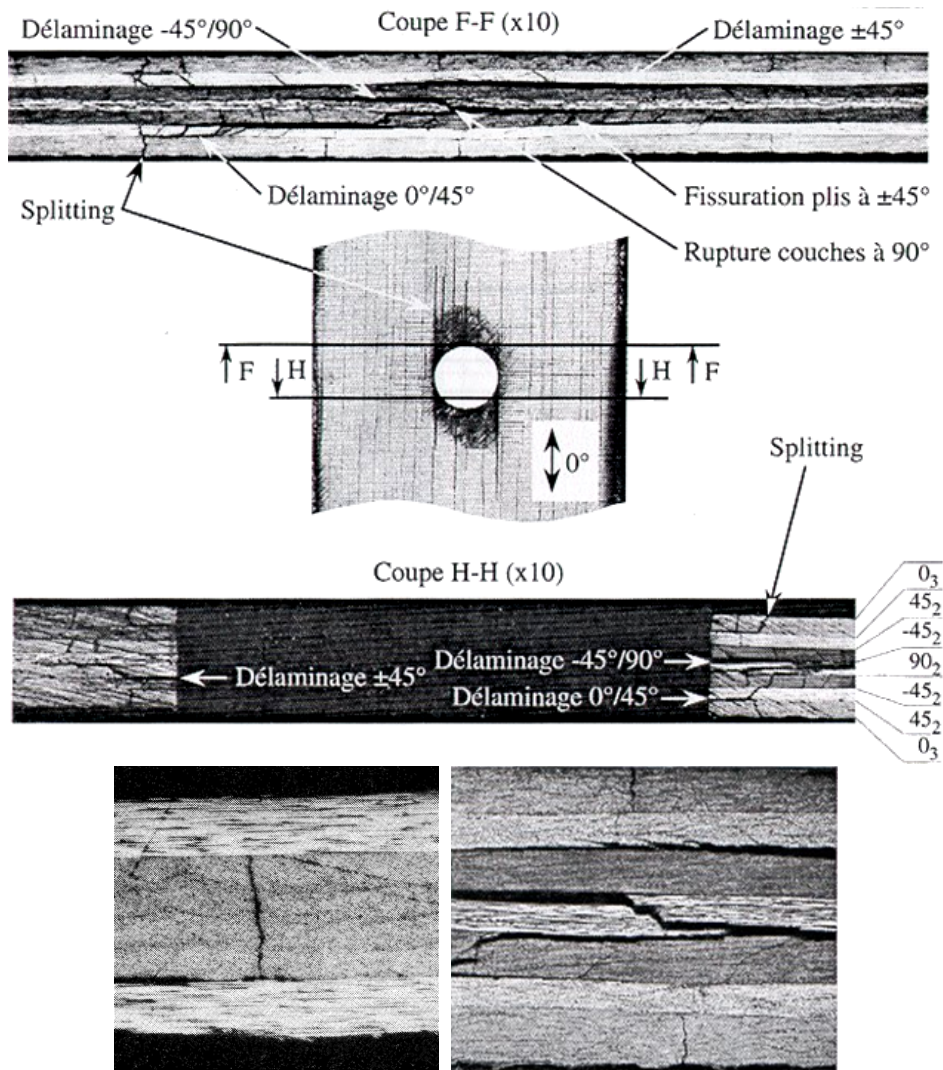


FIGURE 5.3 – Mécanisme de rupture d'une plaque trouée en tension [Lév98]

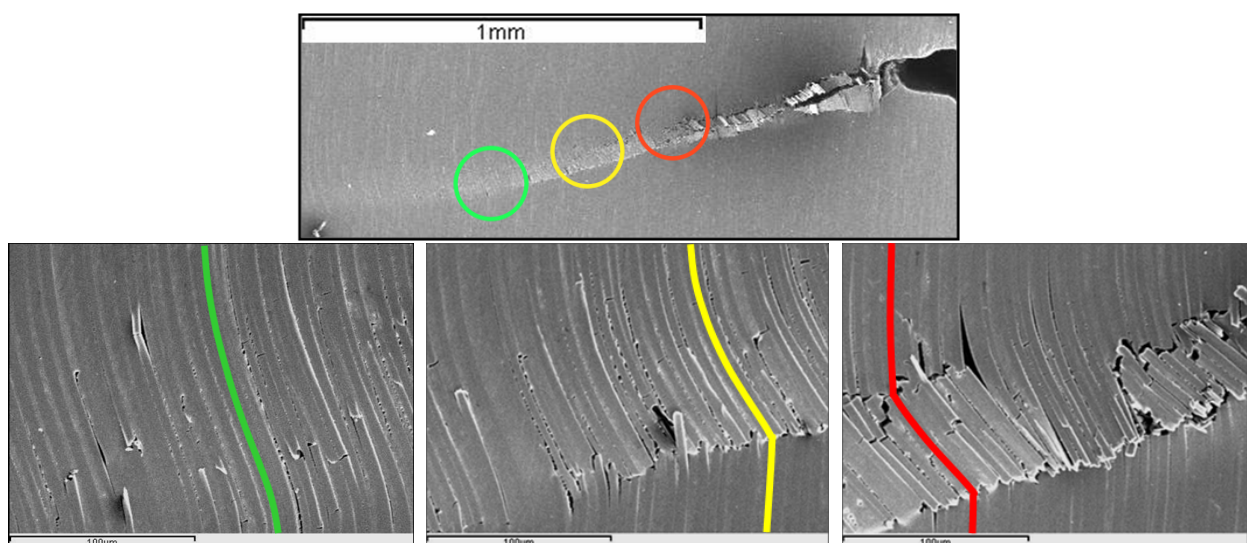


FIGURE 5.4 – Propagation des kink-bands [RSPP08]

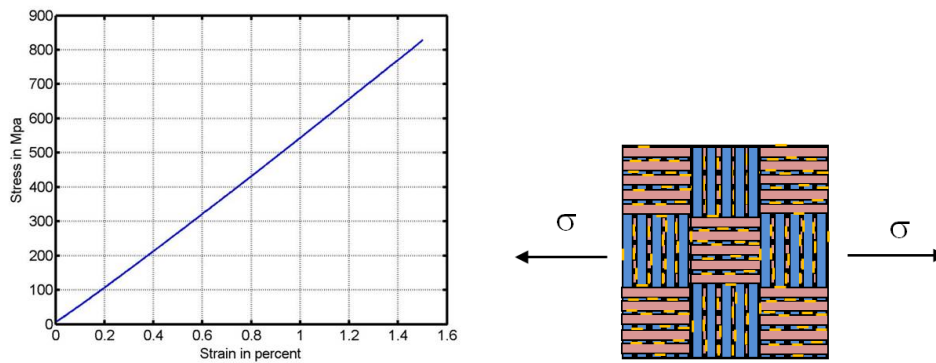


FIGURE 5.5 – Essai de traction sur un déséquilibré verre/époxy $[90]_8$ avec plusieurs cycles de décharge [Tho09]

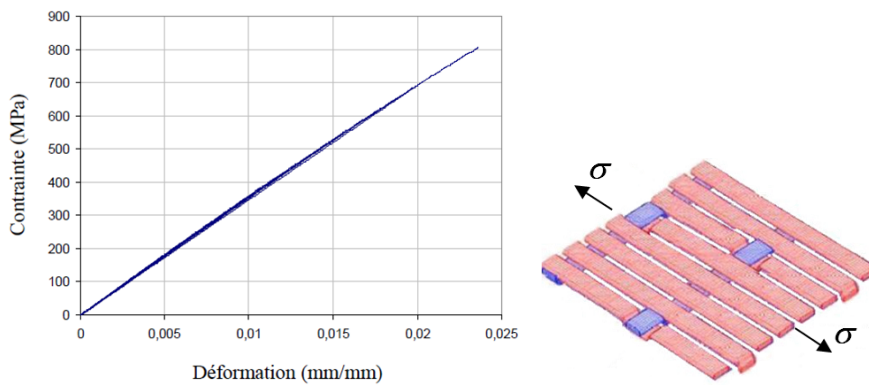


FIGURE 5.6 – Essai de traction sur un déséquilibré verre/époxy $[90]_8$ avec plusieurs cycles de décharge [Tho09]

5.3.2 Critère en déformations maximales

Le critère en déformation maximales est similaire au précédent s’écrit simplement dans le repère d’orthotropie du pli :

$$-\varepsilon_{X'} \leq \varepsilon_{ll} \leq \varepsilon_X \tag{5.4}$$

$$-\varepsilon_{Y'} \leq \varepsilon_{tt} \leq \varepsilon_Y \tag{5.5}$$

$$|\varepsilon_{lt}| \leq \varepsilon_S \tag{5.6}$$

où ε_X , $\varepsilon_{X'}$, ε_Y , $\varepsilon_{Y'}$ et ε_S sont respectivement la déformation maximale en traction longitudinale, en compression longitudinale, en traction transverse, en compression transverse et en cisaillement. Si le comportement est linéaire, on peut

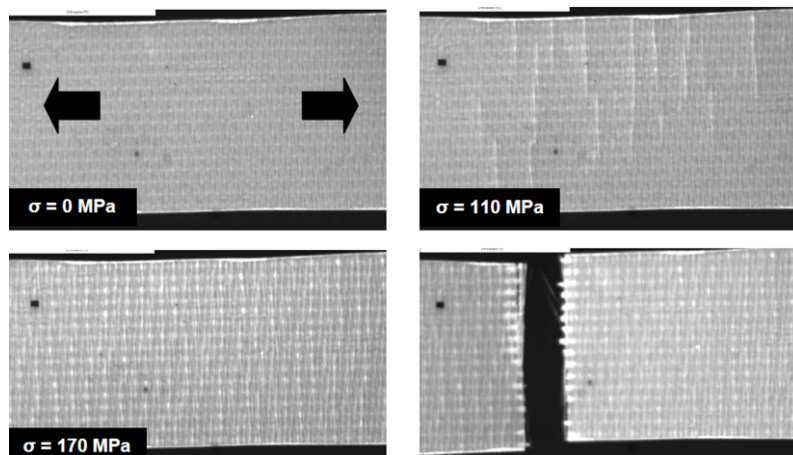


FIGURE 5.7 – Essai de traction sur un seul pli de tissé déséquilibré verre/époxy à 90° [Tho09]

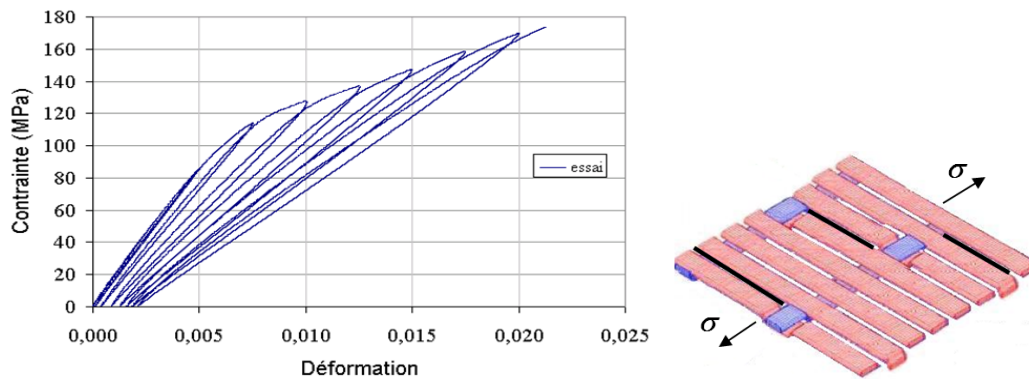


FIGURE 5.8 – Essai de traction sur un déséquilibré verre/époxy $[90]_8$ avec plusieurs cycles de décharge [Tho09]

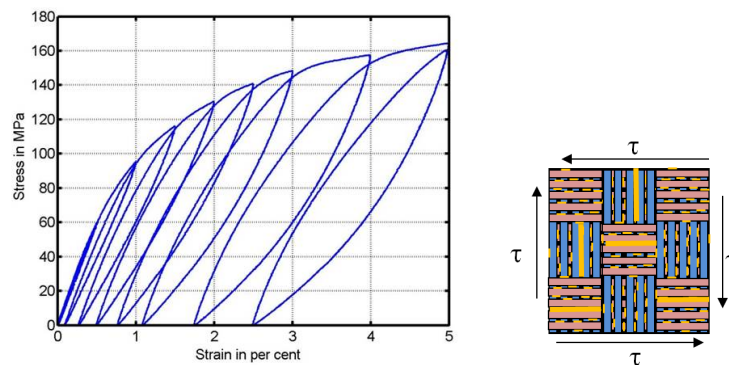


FIGURE 5.9 – Essai de traction sur un tissu équilibré carbone/époxy $[45]_n$ avec plusieurs cycles de décharge [Tho09]

considérer que :

$$\varepsilon_X = \frac{X}{E_l}; \varepsilon_{X'} = \frac{X'}{E_l}; \varepsilon_Y = \frac{Y}{E_t}; \varepsilon_{Y'} = \frac{Y'}{E_t} \quad (5.7)$$

En réalité le comportement est fortement non linéaire en compression longitudinale et en transverse, et il sera préférable d'utiliser les valeurs de déformations mesurées sur les essais matériaux.

5.3.3 Critère de Tsai-Hill

Rodney Hill a développé plusieurs critères pour les déformations plastiques anisotropiques [Hil48]. La première version est une extension directe du critère quadratique de von Mises. Ce critère attribut simplement un coefficient à chaque terme

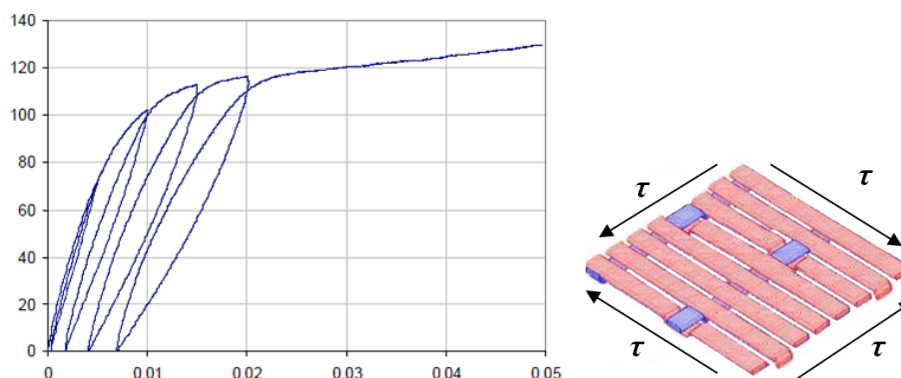


FIGURE 5.10 – Essai de traction sur un tissu déséquilibré verre/époxy $[45]_8$ avec plusieurs cycles de décharge [Tho09]

quadratique :

$$\boxed{F(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + L\tau_{12}^2 + M\tau_{13}^2 + N\tau_{23}^2 \leq 1} \quad (5.8)$$

où F, G, H, L, M et N sont six paramètres matériaux à déterminer par six essais mécaniques.

Si on applique le critère au cas des matériaux unidirectionnels, le critère doit montrer la même résistance selon t et 3 . En traction longitudinale ($\sigma_t = \sigma_{33} = \sigma_{lt} = \sigma_{l3} = \sigma_{t3} = 0$), on aura

$$FX^2 + HX^2 = 1 \Rightarrow F + H = \frac{1}{X^2}$$

De même, en traction transverse ($\sigma_l = \sigma_{33} = \sigma_{lt} = \sigma_{l3} = \sigma_{t3} = 0$), on aura

$$FY^2 + GY^2 = 1 \Rightarrow F + G = \frac{1}{Y^2}$$

Enfin, en traction hors plan ($\sigma_l = \sigma_t = \sigma_{lt} = \sigma_{l3} = \sigma_{t3} = 0$), on aura

$$GY^2 + HY^2 = 1 \Rightarrow G + H = \frac{1}{Y^2}$$

D'après les deux précédentes équations, on remarque que $F = H$. En contraintes planes, il vient

$$\frac{1}{2X^2}(\sigma_l - \sigma_t)^2 + \left(\frac{1}{Y^2} - \frac{1}{2X^2}\right)\sigma_t^2 + \frac{1}{2X^2}\sigma_l^2 + L\sigma_{lt}^2 \leq 1 \quad (5.9)$$

où on constate que $L = \frac{1}{S^2}$ en cisaillement pur. Finalement, il vient

$$\boxed{\left(\frac{\sigma_l}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{Y}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_l\sigma_t}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{lt}}{S}\right)^2 \leq 1} \quad (5.10)$$

Ce critère, déterminé par trois essais mécaniques, est connu sous le nom de **critère de Tsai-Hill** [TH80]. Le principal inconvénient du critère de Tsai-Hill est de ne pas permettre de prendre en compte une résistance différente en traction et en compression. On peut modifier le critère en adaptant les valeurs de résistance en fonction du signe des contraintes :

$$\boxed{\left(\frac{\sigma_l}{X^*}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{Y^*}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_l\sigma_t}{X^*}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{lt}}{S}\right)^2 \leq 1} \quad \begin{cases} X^* = \begin{cases} X & \sigma_l \geq 0 \\ X' & \sigma_l < 0 \end{cases} \\ Y^* = \begin{cases} Y & \sigma_t \geq 0 \\ Y' & \sigma_t < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (5.11)$$

5.3.4 Critère de Tsai-Wu

Pour prendre en compte une résistance différente en traction et en compression de manière naturelle, Tsai et Wu propose de généraliser le critère quadratique précédent sous la forme tensorielle suivante [TW71] :

$$\boxed{\underline{\sigma} \cdot \underline{F} \cdot \underline{\sigma} + \underline{f} \cdot \underline{\sigma} \leq 1} \quad (5.12)$$

i.e.

$$\boxed{F_{ij}\sigma_i\sigma_j + f_i\sigma_i \leq 1} \quad (5.13)$$

soit

$$F_{ll}\sigma_l^2 + F_{tt}\sigma_t^2 + F_{llt}\sigma_{lt}^2 + 2F_{lt}\sigma_l\sigma_t + 2F_{llt}\sigma_l\sigma_{lt} + 2F_{llt}\sigma_t\sigma_{lt} + f_l\sigma_l + f_t\sigma_t + f_{lt}\sigma_{lt} \leq 1 \quad (5.14)$$

En cisaillement, le critère doit être équivalent pour σ_{lt} ou $-\sigma_{lt}$ soit $f_{lt} = F_{llt} = F_{tll} = 0$. Le critère de Tsai-Wu s'écrit alors :

$$F_{ll}\sigma_l^2 + F_{tt}\sigma_t^2 + F_{llt}\sigma_{lt}^2 + 2F_{lt}\sigma_l\sigma_t + f_l\sigma_l + f_t\sigma_t \leq 1 \quad (5.15)$$

Si on applique le critère au cas des matériaux unidirectionnels, le critère en traction et compression longitudinale donne

$$\begin{cases} F_{ll}X^2 + f_lX = 1 \\ F_{ll}X'^2 - f_lX' = 1 \end{cases} \Rightarrow F_{ll} = \frac{1}{XX'} ; f_l = \frac{1}{X} - \frac{1}{X'}$$

De même, en traction transverse, on aura

$$\begin{cases} F_{tt}Y^2 + f_tY = 1 \\ F_{tt}Y'^2 - f_tY' = 1 \end{cases} \Rightarrow F_{tt} = \frac{1}{YY'} ; f_t = \frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'}$$

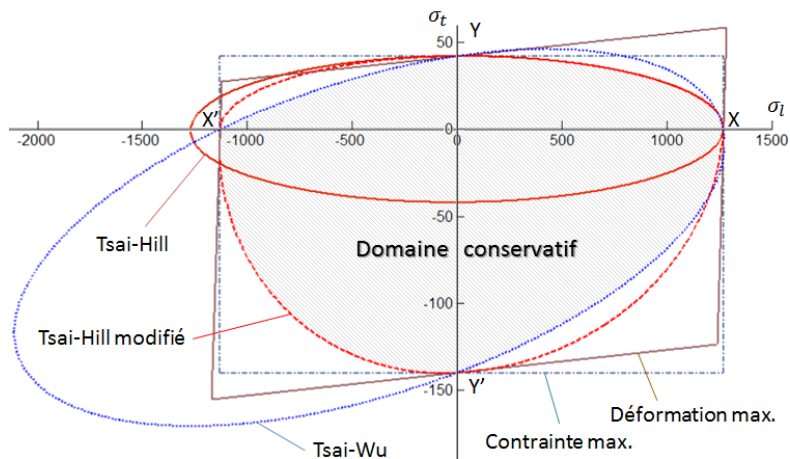


FIGURE 5.11 – Comparaison des critères pour un unidirectionnel carbone HS/époxy (AS4)

En cisaillement plan, on aura

$$F_{lnt} S^2 = 1 \Rightarrow F_{lnt} = \frac{1}{S^2}$$

Enfin, il reste le coefficient d'interaction à déterminer par un essai bi-axial. Si cette valeur n'est pas connue, Tsai et Wu propose d'approximer sa valeur par la relation suivante

$$F_{lt} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{XX'YY'}}$$

Finalement, le **critère de Tsai-Wu** peut s'écrire sous la forme suivante

$$\frac{1}{XX'}\sigma_l^2 + \frac{1}{YY'}\sigma_t^2 + \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X'}\right)\sigma_l + \left(\frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'}\right)\sigma_t - \frac{1}{\sqrt{XX'YY'}}\sigma_l\sigma_t + \frac{1}{S^2}\sigma_{lt}^2 \leq 1 \quad (5.16)$$

On remarque que si $X = X'$ et $Y = Y'$, on retrouve le critère Tsai-Hill. Enfin, le critère est parfois écrit en déformation.

Le critère contient des termes linéaires et quadratique, il convient donc de faire attention pour le calcul d'un coefficient de sécurité s (souvent noté r) :

$$s^2 \left(\frac{1}{XX'}\sigma_l^2 + \frac{1}{YY'}\sigma_t^2 - \frac{1}{\sqrt{XX'YY'}}\sigma_l\sigma_t + \frac{1}{S^2}\sigma_{lt}^2 \right) + s \left(\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X'} \right) \sigma_l + \left(\frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'} \right) \sigma_t \right) - 1 = 0 \quad (5.17)$$

Cette équation possède deux solutions pour s mais seule la solution positive est vraie.

5.3.5 Comparaison des critères

La comparaison des critères peut être réalisée sur un matériau unidirectionnel.

On note que le critère de Tsai-Hill est beaucoup trop conservatif sauf en compression longitudinale. En revanche, le critère de Tsai-Hill modifié est beaucoup plus proche de celui de Tsai-Wu.

5.3.6 Effet des concentrations de contraintes

Les structures composites possèdent souvent des singularités comme des trous, des encoches, des entailles ... qui créent des concentrations de contraintes. Dans le cas des matériaux métalliques, des facteur de contrainte (K_t) suffisent à tenir compte de ces effets mais les critères peuvent être conservés. Dans le cas des matériaux composites, ces facteurs sont insuffisant et les critères classiques sont beaucoup trop conservatifs. Ils sous-estiment généralement fortement l'apparition de la rupture. Par exemple dans le cas d'une plaque quasi-isotrope trouée en carbone/époxy, la contrainte au bord du trou dans la direction des fibres peut être bien supérieure à la contrainte à rupture. Whitney et Nuismer ont été les premiers à proposer des critères non locaux comme le critère « point stress » et le critère de contrainte moyenne [WN74]. Le critère « point stress » consiste à considérer que les fibres cassent si la contrainte atteint la contrainte maximale à une

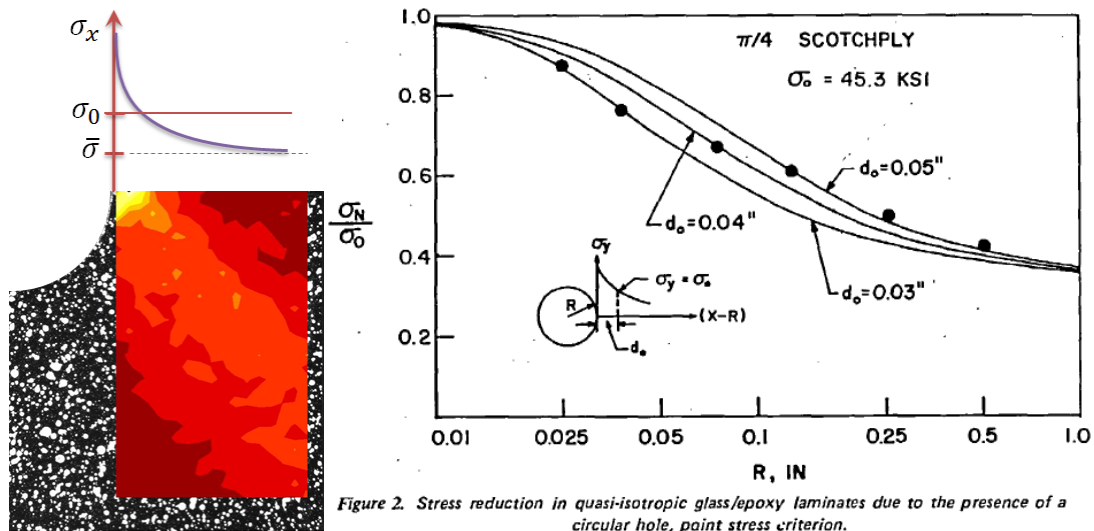


FIGURE 5.12 – Champ de déformation au bord d'une plaque trouée quasi-isotrope et concentration de contrainte au bord du trou - Critère « point stress » [WN74]

certain distance du bord du trou d_0 . Cette distance permet aussi de s'affranchir des problèmes de convergence des maillages éléments finis au niveau des singularités. Ces critères relativement simple à implémenter sont très utilisés par les ingénieurs aéronautiques (Dassault, ...).

Bibliographie

- [AJ13] Michael F ASHBY et Kara JOHNSON : *Materials and design : the art and science of material selection in product design*. Butterworth-Heinemann, 2013.
- [Ber05] Jean-Marie BERTHELOT : *Matériaux composites : comportement mécanique et analyse des structures*. Lavoisier, 4^{ième} édition, 2005.
- [Cha01] J.-P. CHARLES : Découvrir les composites. CD-ROM, 2001.
- [Gay97] Daniel GAY : *Matériaux composites*. Hermes Paris, 1997.
- [Gen11] Lionel GENDRE : Matériaux composites et structures composites. http://www.si.ens-cachan.fr/accueil_V2.php?page=affiche_ressource&id=165, 2011.
- [Gor08] L. GORNET : *Généralités sur les matériaux composites*. École Centrale Nantes, téléchargeable sur <http://cel.archives-ouvertes.fr>, 2008.
- [Hil48] R. HILL : A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 193(1033):281–297, 1948.
- [Lév98] David LÉVÊQUE : *Analyse de la tenue au délaminage des composites stratifiés : identification d'un modèle d'interface interlaminaire*. Thèse de doctorat, 1998.
- [Mon13] O. MONTAGNIER : *Mécanique des structures*. Ecole de l'air, téléchargeable sur <http://www.crea.air.defense.gouv.fr/>, 2013.
- [Rou05] D. ROUBY : *Introduction aux matériaux composites*. INSA, téléchargeable sur <http://polycop.insa-lyon.fr>, 2005.
- [RSPP08] Gutkin R., Pinho S.T., Robinson P. et Curtis P.T. : Physical mechanisms associated with initiation and propagation of kink-bands. In *13th European Conference on Composite Materials*, Stockholm, June 2008.
- [TH80] S. W. TSAI et H. T. HAHN : *Introduction to composite materials*. CRC, 1980.
- [Tho09] Y. THOLLON : *Etude du comportement à rupture des composites stratifiés constitués de plis tissés sous chargement statique et de fatigue*. Thèse de doctorat, Université de Provence, 2009.
- [TW71] S. W. TSAI et E. M. WU : A general theory of strength of anisotropic materials. *Journal of Composite Materials*, 5:58–69, 1971.
- [WN74] J Ma WHITNEY et RJ NUISMER : Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations. *Journal of Composite Materials*, 8(3):253–265, 1974.